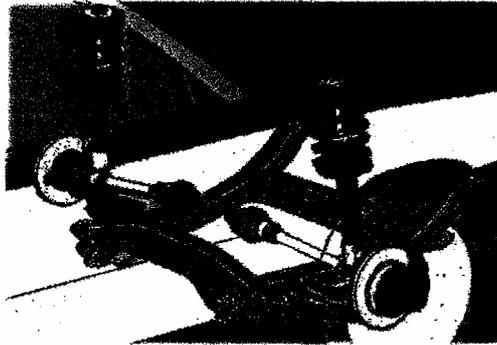


P. Agati Y. Brémont G. Delville

DEUG TI • IUT • STS

Mécanique du solide

Applications industrielles



DUNOD

N° 03

2^e partie

STATIQUE

1 □ modélisation des actions mécaniques

Le but de ce chapitre est de choisir une représentation mathématique des actions mécaniques, d'étudier l'action mécanique de la pesanteur et de définir les efforts que peuvent transmettre les liaisons, afin par la suite, de procéder à leur dimensionnement.

1. REPRÉSENTATION MATHÉMATIQUE DES ACTIONS MÉCANIQUES

1.1. DÉFINITION D'UNE ACTION MÉCANIQUE

On appelle action mécanique toute cause susceptible de maintenir un corps au repos, ou de créer un mouvement, ou de déformer un corps.

1.2. CLASSIFICATIONS DES ACTIONS MÉCANIQUES

- Les actions mécaniques sont de deux sortes :
- actions mécaniques à distance (champ de pesanteur, champ électromagnétique, ...),
- actions mécaniques de contact (liaisons surfaciques, ...).
- On distingue les actions mécaniques extérieures et intérieures à un ensemble de corps.

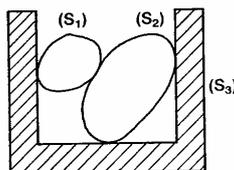


Fig. 1

Soient 3 corps (S_1) , (S_2) , (S_3) et soit (E) l'ensemble constitué par les 2 corps (S_1) et (S_2) .

- L'action mécanique de (S_3) sur (S_2) est extérieure à (E) .
- L'action mécanique de (S_1) sur (S_2) est intérieure à (E) .

REMARQUE

Cette dernière classification est nécessaire pour appliquer le principe fondamental de la statique à un ensemble de corps (voir chapitre 2).

1.3. PREMIER PRINCIPE DE LA STATIQUE

Certaines actions mécaniques peuvent être caractérisées par un vecteur lié.

EXEMPLE

Considérons un corps (S) suspendu à un câble.

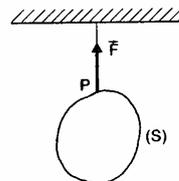


Fig. 2

Dans ce cas, l'action mécanique du câble sur (S) est caractérisée par le vecteur lié (P, \vec{F}) .

Définition

Une force est une action mécanique représentée par un vecteur lié.

Mais la notion de vecteur lié est insuffisante à elle seule pour représenter complètement d'autres actions mécaniques.

EXEMPLE

Supposons qu'à l'extrémité d'une poutre (S), encastree dans un bât (Σ), on exerce par l'intermédiaire d'un cable (C) la force (P, F̄). Dans ce cas l'action mécanique de (S) sur (Σ) dépend de la position de la force par rapport à (Σ). C'est pourquoi on est amené à introduire la notion de moment de la force (P, F̄) par rapport à un point A, quelconque, pour compléter la caractérisation de l'action mécanique de (C) sur (S).

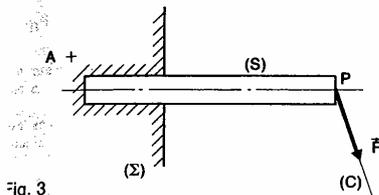


Fig. 3

Par suite, on représente l'action mécanique du cable sur la poutre par les deux vecteurs :

$$\begin{aligned} \vec{R}(C \rightarrow S) &= \vec{F} \\ \vec{M}_A(C \rightarrow S) &= \vec{AP} \wedge \vec{F} \end{aligned}$$

REMARQUE

Si le moment de la force est écrit au point P les 2 vecteurs sont les suivants :

$$\begin{aligned} \vec{R}(C \rightarrow S) &= \vec{F} \\ \vec{M}_P(C \rightarrow S) &= \vec{0} \end{aligned}$$

D'une façon générale, si un corps (S) subit de la part d'un ensemble matériel (E) une action mécanique représentée par un système de n forces (P_i, F̄_i) on caractérise globalement cette action mécanique par les deux vecteurs suivants :

$$\begin{cases} \vec{R}(E \rightarrow S) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \\ \vec{M}_A(E \rightarrow S) = \sum_{i=1}^n \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i \end{cases}$$

On dit alors que l'action mécanique de (E) sur (S) est équivalente, au point A, aux deux vecteurs R̄(E → S) et M̄_A(E → S).

Définitions

R̄(E → S) est appelé la résultante générale de l'action mécanique de (E) sur (S).

M̄_A(E → S) est appelé le moment résultant au point A de l'action mécanique de (E) sur (S).

Propriété

Le moment résultant s'écrit au point B

$$\vec{M}_B(E \rightarrow S) = \sum_{i=1}^n \vec{BP}_i \wedge \vec{F}_i$$

Cherchons la relation qui existe entre M̄_B(E → S) et M̄_A(E → S).

$$\begin{aligned} \vec{M}_B(E \rightarrow S) &= \sum_{i=1}^n (\vec{BA} + \vec{AP}_i) \wedge \vec{F}_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) \wedge \vec{AB} \end{aligned}$$

d'où :

$$\vec{M}_B(E \rightarrow S) = \vec{M}_A(E \rightarrow S) + \vec{R}(E \rightarrow S) \wedge \vec{AB}$$

Le moment résultant d'une action mécanique vérifie donc la relation de changement de point du moment d'un torseur. Par suite le champ des moments résultants d'une action mécanique répond à la définition d'un torseur, ce qui nous conduit à énoncer ainsi le premier principe de la statique :

Premier principe de la statique

Toute action mécanique est entièrement caractérisée, d'un point de vue mécanique, par un torseur.

Dans le cas précédent, le torseur représentant l'action mécanique de (E) sur (S) s'écrit :

$$\{ \mathcal{T}(E \rightarrow S) \} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(E \rightarrow S) \\ \vec{M}_A(E \rightarrow S) \end{array} \right\}$$

Définitions

Le torseur {T(E → S)} est appelé torseur d'action mécanique de (E) sur (S).

De plus, on précise les définitions précédentes en appelant :

R̄(E → S) la résultante générale du torseur d'action mécanique de (E) sur (S).

M̄_A(E → S) le moment résultant au point A du torseur d'action mécanique de (E) sur (S).

1.4. PROPRIÉTÉS DU TORSEUR D'ACTION MÉCANIQUE

Toute action mécanique étant caractérisée par un torseur possède toutes les propriétés du torseur. Nous allons donc voir à quoi correspondent, pour les actions mécaniques, certaines propriétés mathématiques du torseur.

1.4.1. Actions mécaniques équivalentes

Application 1 :

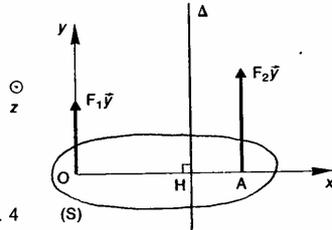


Fig. 4

Soit un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Un solide (S) subit de la part d'un ensemble matériel (E) une action mécanique représentée par les deux forces $(O, F_1\vec{y})$ et $(A, F_2\vec{y})$ telles que $\overline{OA} = d\vec{x}$ ($d \geq 0$).

Déterminons l'axe central et le moment central du torseur d'action mécanique de (E) sur (S).
Ce torseur s'écrit au point O :

$$\{\mathcal{T}(E \rightarrow S)\} = \begin{Bmatrix} (F_1 + F_2)\vec{y} \\ F_2 d\vec{z} \end{Bmatrix}_O$$

Son axe central Δ a pour direction \vec{y} . Le pied H de la perpendiculaire abaissée de O sur Δ est donné par la relation (2) du chapitre 3 paragraphe 1.2.1. de cinématique :

$$\overline{OH} = \frac{(F_1 + F_2)\vec{y} \wedge F_2 d\vec{z}}{(F_1 + F_2)^2}$$

$$\overline{OH} = \frac{F_2}{F_1 + F_2} d\vec{x}$$

Ce qui nous permet de mettre en place Δ (figure 4). Les deux éléments de réduction du torseur sont perpendiculaires, par conséquent le torseur est à résultante et le moment central est nul. Par suite, le torseur s'écrit au point H :

$$\{\mathcal{T}(E \rightarrow S)\} = \begin{Bmatrix} (F_1 + F_2)\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_H$$

Ce qui signifie que l'action mécanique des deux forces est équivalente à la résultante générale $(F_1 + F_2)\vec{y}$ de support Δ .

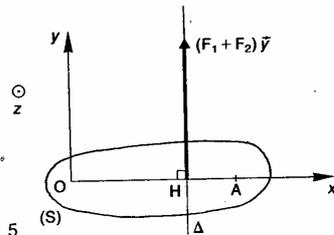


Fig. 5

Application 2 :

Soit un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Un tire-bouchon (S) subit d'une main (M) une action mécanique représentée par

les trois forces $(A, F_1\vec{x})$, $(B, -F_1\vec{x})$ et $(O, -F_2\vec{z})$ telle que :

$$\overline{OA} = -\overline{OB} = a\vec{y} \quad (a > 0).$$

Déterminons l'axe central et le moment central d'un torseur d'action mécanique de (M) sur (S).
Ce torseur s'écrit au point O :

$$\{\mathcal{T}(M \rightarrow S)\} = \begin{Bmatrix} -F_2\vec{z} \\ -2aF_1\vec{z} \end{Bmatrix}_O$$

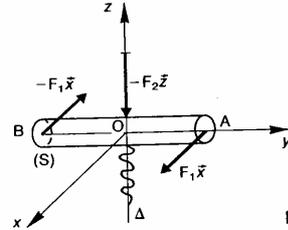


Fig. 6

Son axe central Δ a pour direction \vec{z} . Comme en un point de l'axe central d'un torseur : deux éléments de réduction ont même direction, Δ est confondu avec l'axe (O, \vec{z}) .

Dans ce cas, l'action mécanique des trois forces est équivalente à la résultante générale $-F_2\vec{z}$ et au moment résultant $-2aF_1\vec{z}$ de support Δ .

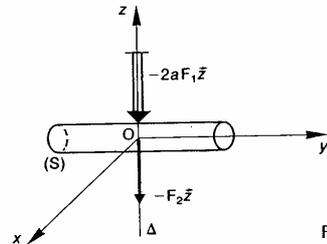


Fig. 7

REMARQUE

Les vecteurs moments seront tracés avec des traits parallèles.

1.4.2. Actions mécaniques particulières

Action mécanique représentable par un couple
Le torseur d'action mécanique d'un ensemble matériel (E) sur un corps (S) est un couple s'il est de la forme :

$$\{\mathcal{T}(E \rightarrow S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_A(E \rightarrow S) \end{Bmatrix}_A$$

avec :

$$\vec{M}_A(E \rightarrow S) \neq \vec{0}.$$

Application

Soit un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Un tire-bouchon (S) subit d'une main (M) une action mécanique représentée

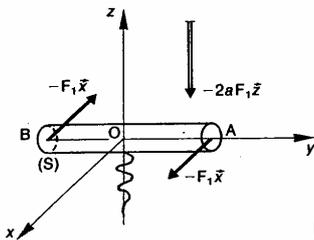


Fig. 8

les deux forces (A, $F_1\vec{x}$) et (B, $-F_1\vec{x}$) telles que :
 $\vec{OA} = -\vec{OB} = a\vec{y}$ ($a > 0$).

Le torseur d'action mécanique de (M) sur (S) s'écrit au point O :

$$\{\mathcal{T}(M \rightarrow S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -2aF_1\vec{z} \end{Bmatrix}$$

Ce torseur est un couple si $F_1 \neq 0$.

Le moment d'un couple étant le même en tout point on peut placer sur la figure le vecteur moment résultant $-2aF_1\vec{z}$ en n'importe quel point du repère R.

Action mécanique représentable par un torseur à résultante

Le torseur d'action mécanique d'un ensemble matériel (E) sur un corps (S) est un torseur à résultante s'il est de la forme :

$$\{\mathcal{T}(E \rightarrow S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(E \rightarrow S) \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

avec

$$\vec{R}(E \rightarrow S) \neq \vec{0}.$$

Le point A est un point de l'axe central Δ de ce torseur.

Application

Soit un repère R(O, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$). Un corps (S) subit de la part d'un ensemble matériel (E) une action mécanique représentée par n forces (P_i, \vec{F}_i) de même direction, définie par le vecteur unitaire \vec{u} .

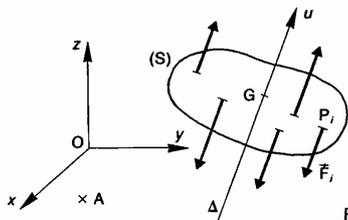


Fig. 9

On pose :

$$\vec{F}_i = F_i\vec{u}.$$

Montrons que le torseur d'action mécanique de (E) sur (S) est un torseur à résultante.

Ce torseur s'écrit en un point A quelconque :

$$\{\mathcal{T}(E \rightarrow S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(E \rightarrow S) \\ \vec{M}_A(E \rightarrow S) \end{Bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \vec{R}(E \rightarrow S) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{u} \sum_{i=1}^n F_i \\ \vec{M}_A(E \rightarrow S) = \sum_{i=1}^n \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i = \left(\sum_{i=1}^n F_i \vec{AP}_i \right) \wedge \vec{u} \end{cases}$$

Les deux éléments de réduction du torseur sont perpendiculaires, par suite ce torseur est à résultante. Cherchons l'axe central Δ de ce torseur. Δ a pour direction \vec{u} . Le pied H de la perpendiculaire abaissée de A sur Δ est donné par la relation :

$$\vec{AH} = \frac{\vec{u} \sum_{i=1}^n F_i \wedge \left[\left(\sum_{i=1}^n F_i \vec{AP}_i \right) \wedge \vec{u} \right]}{\left(\sum_{i=1}^n F_i \right)^2}$$

soit

$$\vec{AH} = \frac{\vec{u} \wedge \left[\left(\sum_{i=1}^n F_i \vec{AP}_i \right) \wedge \vec{u} \right]}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

En appliquant la relation du double produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3)\vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)\vec{V}_3$

aux trois vecteurs \vec{u} , $\sum_{i=1}^n F_i \vec{AP}_i$ et \vec{u} , on obtient :

$$\vec{AH} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \vec{AP}_i \cdot \left[\vec{u} \cdot \left(\sum_{i=1}^n F_i \vec{AP}_i \right) \right] \vec{u}}{\sum_{i=1}^n F_i \sum_{i=1}^n F_i}$$

Remarquons que le premier terme est indépendant de \vec{u} . Posons :

$$\vec{AG} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \vec{AP}_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

et notons λ le coefficient de \vec{u} du deuxième terme.

Par suite $\vec{AH} = \vec{AG} + \vec{GH}$, avec $\vec{GH} = \lambda\vec{u}$.

Le point H étant sur Δ , le point G l'est également.

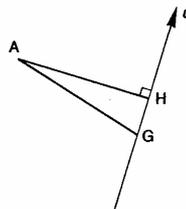


Fig. 10

Par suite, l'axe central Δ est défini par la direction \vec{u} et le point G.

Définition

Le point G est appelé centre des n forces parallèles (P_i, F_i).

REMARQUE

Lorsque la direction \vec{u} change par rapport à R, les autres paramètres restant inchangés, le point G reste fixe dans R. Par conséquent, le lieu de Δ dans R est le point G.

2. MODELISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES A DISTANCE

Nous n'étudions que l'action mécanique de la pesanteur, action mécanique toujours présente sur tous les mécanismes. Quelquefois, nous serons cependant amenés à la négliger devant d'autres actions mécaniques souvent beaucoup plus intenses.

2.1. CHAMP DE PESANTEUR

Le champ de pesanteur est un champ qui peut être considéré comme uniforme en tout point d'une région localisée de l'espace. Ce champ est orienté suivant la verticale descendante.

REMARQUE

La verticale, matérialisée par le fil à plomb, ne passe pas par le centre de la terre à cause des effets d'inertie d'entraînement dues à la rotation de la Terre.

Soit R(O, \vec{x} , \vec{y} , \vec{z}) un repère lié à la Terre, tel que l'axe (O, \vec{z}) soit dirigé suivant la verticale ascendante du lieu considéré (figure 11).

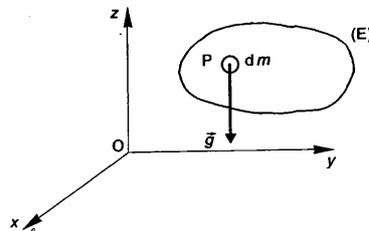


Fig. 11

Compte tenu des résultats acquis en classe de Terminale dans le cours de dynamique, nous définissons l'action mécanique du champ de pesanteur en chaque point P d'un ensemble matériel (E) par sa densité $\vec{g} = -g\vec{z}$ ($g > 0$) relativement à la mesure de masse dm du point P considéré.

REMARQUE

g représente l'accélération du champ pesantEUR. A Paris, au niveau du sol :

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2.$$

Par suite, le torseur d'action mécanique de pesanteur sur (E) s'écrit en un point A quelconque

$$\{\mathcal{T}(g \rightarrow E)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(g \rightarrow E) \\ \vec{M}_A(g \rightarrow E) \end{array} \right\}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(g \rightarrow E) = \int_{P \in E} \vec{g} \, dm = m\vec{g} = -mg\vec{z} \\ \vec{M}_A(g \rightarrow E) = \int_{P \in E} \vec{AP} \wedge \vec{g} \, dm \\ = - \left(\int_{P \in E} g \vec{AP} \, dm \right) \end{array} \right.$$

en désignant par m la masse de (E).

Posons : $P = \|\vec{R}(g \rightarrow E)\|$.

P représente le poids de (E).

Par conséquent, entre la masse et le poids de (E) existe la relation :

$$P = mg.$$

REMARQUE

Dans le système S.I., la masse s'exprime kilogramme (kg) et le poids, qui est homogène une force, s'exprime en newtons (N).

Les deux éléments de réduction du tors { $\mathcal{T}(g \rightarrow E)$ } sont perpendiculaires. Par conséquent ce torseur est à résultante, ce qui signifie que l'action mécanique de la pesanteur sur (E) équivaut à la résultante $-mg\vec{z}$ de support Δ étant l'axe central du torseur.

L'axe central a pour direction \vec{z} . Cherchons le point H de la perpendiculaire abaissée de A sur Δ. Le vecteur \vec{AH} est donné par la relation :

$$\vec{AH} = \frac{mg\vec{z} \wedge \left[\left(\int_{P \in E} g \vec{AP} \, dm \right) \wedge \vec{z} \right]}{(mg)^2}$$

soit

$$\vec{AH} = \frac{1}{m} \vec{z} \wedge \left[\left(\int_{P \in E} \vec{AP} \, dm \right) \wedge \vec{z} \right].$$

En appliquant la relation du double produit vectoriel :

$$\vec{AH} = \frac{1}{m} \int_{P \in E} \vec{AP} \, dm - \frac{1}{m} \left(\vec{z} \cdot \int_{P \in E} \vec{AP} \, dm \right) \vec{z}$$

Posons :

$$\vec{AG} = \frac{1}{m} \int_{P \in E} \vec{AP} \, dm$$

Soit λ le coefficient de \vec{z} dans l'expression de \vec{G} .
 On a $\vec{AH} = \vec{AG} + \vec{GH}$ avec $\vec{GH} = \lambda \vec{z}$.
 Le point G ainsi défini se trouve sur Δ .

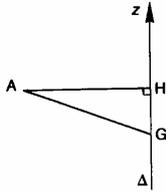


Fig. 12

Definition

Le point G est appelé *centre de gravité* ou *centre d'inertie* de l'ensemble matériel (E).

Propriétés

1. Le centre d'inertie G est le point tel que :

$$\int_{P \in E} \vec{GP} \, dm = \vec{0}.$$

2. Si (E) est un solide, le centre d'inertie de (E) est un point lié au solide (E).

3. Soit une partition de $E(m, G)$ en n éléments $E_i(m_i, G_i)$. Alors

$$\int_{P \in E} \vec{AP} \, dm = \sum_{i=1}^n \int_{P \in E_i} \vec{AP} \, dm$$

et

$$m \vec{AG} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{AG}_i$$

soit

$$\vec{AG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{AG}_i$$

Expression analogue à celle mise en évidence pour déterminer le centre de n forces parallèles.

4. Si (E) est homogène et admet un élément de symétrie (plan, axe, centre) son centre d'inertie appartient à cet élément de symétrie.

2.2. APPLICATIONS

1. Centre d'inertie d'un cône de révolution de hauteur h , plein et homogène.

Le centre d'inertie G se trouve sur l'axe de symétrie (O, \vec{z}) du tronc de cône (S) de sommet O . Soit Z son abscisse.

(S) étant homogène on peut remplacer dans la relation donnant la position du centre d'inertie la mesure de masse dm par la mesure de volume dv .

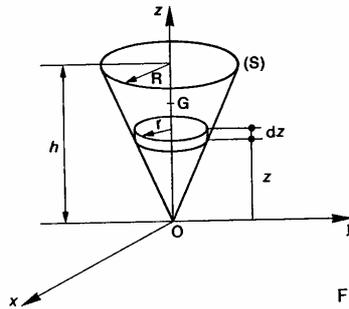


Fig. 13

Soit z l'abscisse d'un point P quelconque de (S) sur l'axe (O, \vec{z}) .

Soit V le volume du cône.

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

(R : rayon du cercle de base du cône.)

Dans ces conditions, la relation permettant de déterminer le centre d'inertie s'écrit en projection sur \vec{z} :

$$Z = \frac{1}{V} \int_{P \in S} z \, dv.$$

Pour calculer Z choisissons comme élément d'intégration un disque d'abscisse z , d'épaisseur dz , de rayon r .

Alors $dv = \pi r^2 dz$, comme $r = \frac{R}{h} z$:

$$Z = \frac{3}{\pi R^2 h} \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} z^3 dz$$

$$Z = \frac{3}{h^3} \int_0^h z^3 dz$$

soit

$$Z = \frac{3}{4} h.$$

2. Centre d'inertie d'une demi-sphère de rayon R , creuse et homogène (sans la base).

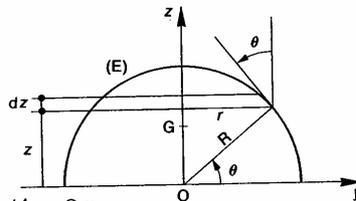


Fig. 14

Par un raisonnement analogue au précédent. On trouve que l'abscisse Z du centre d'inertie G est donné par la relation :

$$Z = \frac{1}{S} \int_{P \in E} z \, ds.$$

$S = 2\pi R^2$ (surface d'une demi-sphère).

Dans ce cas l'élément d'intégration à choisir est un tronç de cône (creux) d'abscisse z , de hauteur dz , de demi-angle au sommet θ , de rayon de cercle de base r .

Alors $ds = 2\pi r \frac{dz}{\cos \theta}$, comme $r = R \cos \theta$:

$$ds = 2\pi R dz$$

et
$$Z = \frac{1}{2\pi R^2} \int_0^R 2\pi R z dz$$

$$Z = \frac{R}{2}$$

2.3. THÉORÈMES DE GULDIN

Premier théorème

L'aire de la surface engendrée par une courbe plane tournant autour d'un axe de son plan, ne la traversant pas, est égale au produit de la longueur de la courbe par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité.

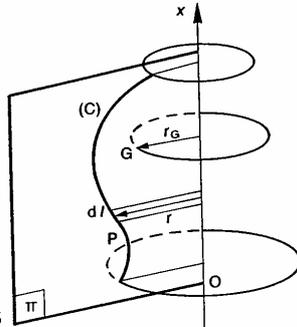


Fig. 15

Dans un plan (Π) considérons une courbe (C) de longueur L et un axe (O, \vec{x}) ne la traversant pas. La position du centre de gravité G de cette courbe est donnée par la relation :

$$L \overline{OG} = \int_{P \in C} \overline{OP} dl$$

En projection sur un axe perpendiculaire à (O, \vec{x}) contenu dans (Π), on obtient :

$$L r_G = \int_{P \in C} r dl$$

Multiplions les deux membres de l'égalité par 2π

$$L 2\pi r_G = \int_{P \in C} 2\pi r dl$$

Le deuxième membre de l'égalité représente l'aire S engendrée par la courbe (C) en tournant autour de l'axe (O, \vec{x}), d'où la relation :

$$S = L 2\pi r_G$$

APPLICATION 1

Centre de gravité d'un fil homogène, demi-circulaire de rayon R .

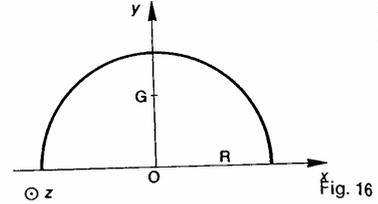


Fig. 16

La relation précédente devient :

$$4\pi R^2 = \pi R (2\pi \cdot OG)$$

et

$$OG = \frac{2R}{\pi}$$

APPLICATION 2

Surface d'un tore (anneau cylindrique)

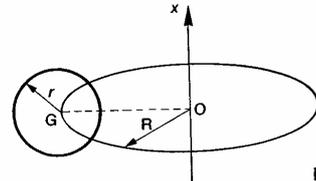


Fig. 17

$$S = 2\pi r \cdot 2\pi R$$

$$S = 4\pi^2 R r$$

Deuxième théorème

Le volume engendré par une surface plane tournant autour d'un axe de son plan, ne la traversant pas, est égal au produit de l'aire de la surface par la longueur du périmètre du cercle décrit par son centre de gravité.

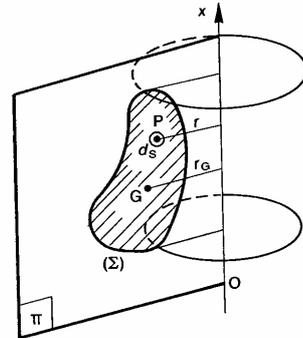


Fig. 1

ans un plan (II) considérons une surface (Σ)
aire S et un axe (O, \vec{x}) ne la traversant pas.
a position du centre de gravité G de cette surface
it donnée par la relation :

$$S\vec{OG} = \int_{P \in \Sigma} \vec{OP} \, ds.$$

n projection sur un axe perpendiculaire à (O, \vec{x})
ntenu dans (II), on obtient :

$$S r_G = \int_{P \in \Sigma} r \, ds.$$

ultiplions les deux membres de l'égalité par 2π

$$S 2\pi r_G = \int_{P \in \Sigma} 2\pi r \, ds.$$

e deuxième membre de l'égalité représente le
olume V engendré par la surface (Σ) en tournant
tour de l'axe (O, \vec{x}) d'où la relation :

$$V = S 2\pi r_G.$$

APPLICATION 1

Centre de gravité d'un demi-disque homogène, de rayon R .

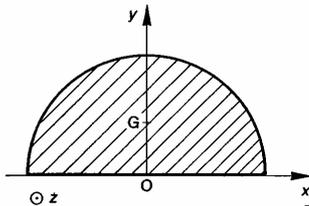


Fig. 19

La relation précédente devient :

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{2} \pi R^2 \cdot (2\pi \cdot OG)$$

et

$$OG = \frac{4R}{3\pi}$$

APPLICATION 2

Volume d'un tore.

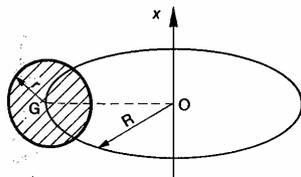


Fig. 20

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi R$$

$$V = 2\pi^2 R r^2.$$

3. MODÉLISATION DES ACTIONS MÉCANIQUES DE CONTACT

3.1. TORSEUR D'ACTION MÉCANIQUE DE CONTACT

Tout contact réel entre deux corps a lieu suivant une surface, aussi petite soit-elle. Considérons donc 2 corps (S_1) et (S_2) en contact suivant une surface (S) (figure 21).

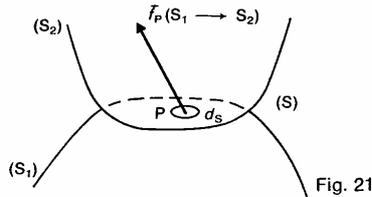


Fig. 21

L'action mécanique de contact de (S_1) sur (S_2) se caractérise, en chaque point P de la surface de contact (S), par une densité surfacique de forces $\vec{f}_P(S_1 \rightarrow S_2)$.

Définition

$\vec{f}_P(S_1 \rightarrow S_2)$ est appelé densité surfacique, au point P , des forces de contact de (S_1) sur (S_2).

REMARQUE

Une densité surfacique de forces est homogène à une force divisée par une surface. Elle s'exprime généralement en mégapascals (MPa).
Rappelons que

$$1 \text{ N/mm}^2 = 1 \text{ MPa}$$

$$1 \text{ da N/mm}^2 = 10 \text{ MPa}$$

$$1 \text{ bar} = 1 \text{ da N/cm}^2 = 0,1 \text{ MPa}.$$

Par suite, l'action mécanique de contact de (S_1) sur (S_2) se représente globalement par le torseur suivant, exprimé en un point A quelconque :

$$\{\mathcal{C}(S_1 \rightarrow S_2)\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) \\ \vec{M}_A(S_1 \rightarrow S_2) \end{array} \right\}$$

avec :

$$\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) = \int_{P \in S} \vec{f}_P(S_1 \rightarrow S_2) \, ds$$

et :

$$\vec{M}_A(S_1 \rightarrow S_2) = \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{f}_P(S_1 \rightarrow S_2) \, ds.$$

Définition

$\{\mathcal{C}(S_1 \rightarrow S_2)\}$ est appelé torseur d'action mécanique de contact de (S_1) sur (S_2).

REMARQUE

Si l'on connaît la densité surfacique des forces de contact en tout point de la surface (S), on peut calculer le torseur d'action mécanique de contact. Par contre, la connaissance de ce torseur ne permet pas la détermination de la densité surfacique des forces de contact, à moins de faire des hypothèses sur la répartition de la densité surfacique.

3.2. LOIS DE COULOMB

Considérons deux solides (S₁) et (S₂) en contact suivant une surface (S). Soient (II) le plan tangent commun à (S₁) et (S₂) en un point P de (S) et $\vec{f}_P(S_1 \rightarrow S_2)$ la densité surfacique des forces de contact de (S₁) sur (S₂) au point P.

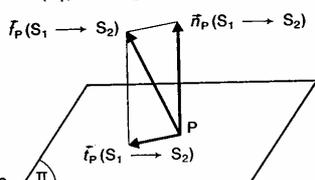


Fig. 22

Posons :

$$\vec{f}_P(S_1 \rightarrow S_2) = \vec{n}_P(S_1 \rightarrow S_2) + \vec{t}_P(S_1 \rightarrow S_2)$$

avec

$\vec{n}_P(S_1 \rightarrow S_2)$ perpendiculaire au plan (II)

et

$\vec{t}_P(S_1 \rightarrow S_2)$ parallèle au plan (II).

Définitions

$\vec{n}_P(S_1 \rightarrow S_2)$ est appelé densité surfacique normale, ou pression, au point P, des forces de contact de (S₁) sur (S₂),
 $\vec{t}_P(S_1 \rightarrow S_2)$ est appelé densité surfacique tangentielle, au point P, des forces de contact de (S₁) sur (S₂).

Soit $\vec{V}(P \in S_2/S_1)$ la vitesse de glissement au point P du solide (S₂) par rapport au solide (S₁). (Ce vecteur est parallèle au plan (II).)

Énoncé des lois de Coulomb

Premier cas : $\vec{V}(P \in S_2/S_1) \neq \vec{0}$

Lorsqu'il y a glissement en P entre (S₁) et (S₂), la densité surfacique tangentielle au point P des forces de contact de (S₁) sur (S₂) est opposée à la vitesse de glissement de (S₂) par rapport à (S₁), ce qui se traduit par les deux relations :

$$\begin{cases} \vec{t}_P(S_1 \rightarrow S_2) \wedge \vec{V}(P \in S_2/S_1) = \vec{0} \\ \vec{t}_P(S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{V}(P \in S_2/S_1) < 0. \end{cases}$$

De plus la norme de la densité surfacique tangentielle est proportionnelle à la norme de la densité surfacique normale au point P des forces de contact de (S₁) sur (S₂), ce qui s'écrit :

$$\|\vec{t}_P(S_1 \rightarrow S_2)\| = f \|\vec{n}_P(S_1 \rightarrow S_2)\|$$

f est le coefficient de frottement en P entre (S₁) et (S₂).

En introduisant l'angle φ, tel que f = tg φ, on peut interpréter géométriquement cette dernière relation en disant que $\vec{f}_P(S_1 \rightarrow S_2)$ se trouve sur le bord d'un cône de sommet P, d'axe perpendiculaire à (II) et de demi-angle au sommet φ, appelé cône de frottement (figure 23). L'angle φ est appelé angle de frottement.

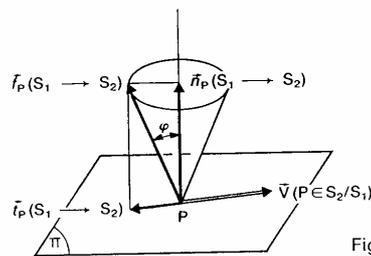


Fig. 23

Deuxième cas : $\vec{V}(P \in S_2/S_1) = \vec{0}$.

Lorsqu'il n'y a pas de glissement en P entre (S₁) et (S₂) la densité surfacique au point P des forces de contact de (S₁) sur (S₂) se trouve à l'intérieur ou à la limite sur le bord du cône de frottement (figure 24).

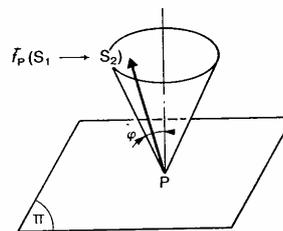


Fig. 24

Ce qui se traduit par la relation :

$$\|\vec{t}_P(S_1 \rightarrow S_2)\| \leq f \|\vec{n}_P(S_1 \rightarrow S_2)\|.$$

REMARQUE 1

En toute rigueur on devrait parler dans deuxième cas d'un coefficient d'adhérence, et est légèrement supérieur à f, mais comme dans la pratique on considère que le coefficient d'adhérence est égal au coefficient de frottement nous ne ferons pas cette distinction.

REMARQUE 2

Si on écarte les cas où par exemple (S_1) et (S_2) sont deux solides aimantés, on peut dire qu'en général le vecteur densité surfacique normal $\vec{n}_P(S_1 \rightarrow S_2)$ est dirigé de (S_1) vers (S_2) .

Tableau de quelques valeurs moyennes du coefficient de frottement

matériaux en contact	f
Acier sur acier	0,10
Bronze sur bronze	0,20
Fonte sur bronze	0,10
Cuir sur métal	0,25
Bois sur bois	0,40
Métaux sur bois	0,30
Garniture de friction sur acier	0,30
Pneus sur chaussée	0,60

Fig. 25

Hypothèse du contact sans frottement

Cette hypothèse consiste à supposer que $f=0$ lorsque le coefficient de frottement est très faible. Alors $\vec{f}_P(S_1 \rightarrow S_2)$ est perpendiculaire à (Π) . Cette hypothèse simplificatrice, lorsqu'elle est possible, permet la résolution de certains problèmes, comme nous le verrons au prochain chapitre.

Application

Considérons deux solides (S_1) et (S_2) en contact avec frottement suivant un plan (Π) (figure 26).

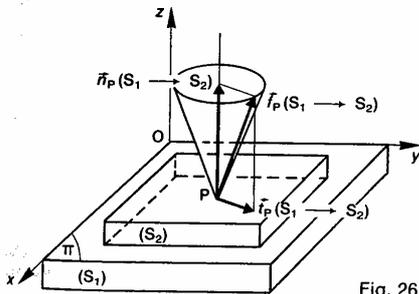


Fig. 26

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère tel que le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) soit confondu avec le plan (Π) , et l'axe (O, \vec{z}) dirigé de (S_1) vers (S_2) .

Soit $\vec{f}_P(S_1 \rightarrow S_2)$ la densité surfacique, en un point P quelconque de la surface de liaison, des forces de contact de (S_1) sur (S_2) .

Posons :

$$\vec{f}_P(S_1 \rightarrow S_2) = q_x \vec{x} + q_y \vec{y} + q_z \vec{z}$$

Alors, la densité surfacique tangentielle est :

$$\vec{t}_P(S_1 \rightarrow S_2) = q_x \vec{x} + q_y \vec{y}$$

et la densité surfacique normale :

$$\vec{n}_P(S_1 \rightarrow S_2) = q_z \vec{z}$$

Soit f le coefficient de frottement entre (S_1) et (S_2) , supposé le même en tout point. Étudions les 2 cas suivants :

Premier cas : (S_2) est immobile par rapport à (S_1) . Dans ce cas nous pouvons simplement affirmer qu'en chaque point de contact la densité surfacique $\vec{f}_P(S_1 \rightarrow S_2)$ se trouve à l'intérieur ou à la limite sur le bord de son cône de frottement, c'est-à-dire que :

$$\|\vec{t}_P(S_1 \rightarrow S_2)\| \leq f \|\vec{n}_P(S_1 \rightarrow S_2)\|$$

soit :

$$\|q_x \vec{x} + q_y \vec{y}\| \leq f \|q_z \vec{z}\|$$

ou encore, en remarquant que $q_z \geq 0$ et \vec{z} unitaire :

$$\|q_x \vec{x} + q_y \vec{y}\| \leq f q_z \tag{1}$$

Nous ne pouvons rien dire, ni sur la norme, ni sur la direction de $\vec{f}_P(S_1 \rightarrow S_2)$ à l'intérieur de son cône de frottement.

Quelle conséquence peut-on en tirer en ce qui concerne la résultante générale $\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2)$ du torseur d'action mécanique de (S_1) sur (S_2) ?

$$\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) = \int_{P \in (\Pi)} \vec{f}_P(S_1 \rightarrow S_2) ds$$

Posons : $\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) = \vec{N}(S_1 \rightarrow S_2) + \vec{T}(S_1 \rightarrow S_2)$ avec :

$$\vec{N}(S_1 \rightarrow S_2) \perp (\Pi)$$

$$\vec{T}(S_1 \rightarrow S_2) \in (\Pi)$$

Définitions

$\vec{N}(S_1 \rightarrow S_2)$ est appelé **composante normale de la résultante générale du torseur d'action mécanique de (S_1) sur (S_2) ou effort normal**.

$\vec{T}(S_1 \rightarrow S_2)$ est appelé **composante tangentielle de la résultante générale du torseur d'action mécanique de (S_1) sur (S_2) ou effort tangentiel**.

Par suite :

$$\vec{N}(S_1 \rightarrow S_2) = \int_{P \in (\Pi)} q_z \vec{z} ds$$

$$\text{et } \vec{T}(S_1 \rightarrow S_2) = \int_{P \in (\Pi)} (q_x \vec{x} + q_y \vec{y}) ds$$

Calculons la norme de l'effort normal :

$$\begin{aligned} \|\vec{N}(S_1 \rightarrow S_2)\| &= \left\| \int_{P \in (\Pi)} q_z \vec{z} ds \right\| \\ &= \left| \int_{P \in (\Pi)} q_z ds \right| \cdot \|\vec{z}\| \end{aligned}$$

Comme $q_z \geq 0$ et \vec{z} unitaire :

$$\|\vec{N}(S_1 \rightarrow S_2)\| = \int_{P \in (\Pi)} q_z ds \tag{2}$$

Calculons la norme de l'effort tangentiel :

$$\|\vec{T}(S_1 \rightarrow S_2)\| = \left\| \int_{P \in (\Pi)} (q_x \vec{x} + q_y \vec{y}) ds \right\|$$

Statique

La norme d'une somme de vecteurs étant inférieure ou égale à la somme des normes des différents vecteurs constituant la somme, on a :

$$\|\vec{T}(S_1 \rightarrow S_2)\| \leq \int_{P \in (\Pi)} \|q_x \vec{x} + q_y \vec{y}\| ds. \quad (3)$$

Intégrons sur tous les points P du plan (II) de contact entre (S₁) et (S₂) l'inéquation (1) :

$$\int_{P \in (\Pi)} \|q_x \vec{x} + q_y \vec{y}\| ds \leq f \int_{P \in (\Pi)} q_z ds.$$

Compte tenu des relations (2) et (3) on obtient entre l'effort tangentiel et l'effort normal de l'action mécanique de (S₁) sur (S₂) l'inéquation :

$$\|\vec{T}(S_1 \rightarrow S_2)\| \leq f \|\vec{N}(S_1 \rightarrow S_2)\|.$$

REMARQUE

L'effort normal est dirigé de (S₁) vers (S₂), c'est-à-dire que :

$$\vec{N}(S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{z} > 0.$$

Le moment résultant $\vec{M}_A(S_1 \rightarrow S_2)$ du torseur d'action mécanique de (S₁) sur (S₂), en un point A quelconque, n'a aucune particularité. Si A est point central (paragraphe 1.2.1 du chapitre 3 de cinématique), $\vec{M}_A(S_1 \rightarrow S_2)$ et $\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2)$ ont même direction que l'axe central Δ du torseur d'action mécanique de (S₁) sur (S₂) (figure 27).

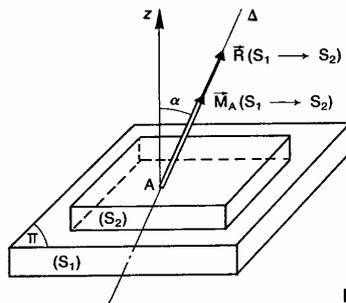


Fig. 27

L'inclinaison α de Δ par rapport à la normale \vec{z} au plan (II) est inférieure ou égale à l'angle de frottement φ ($f = \text{tg } \varphi$).

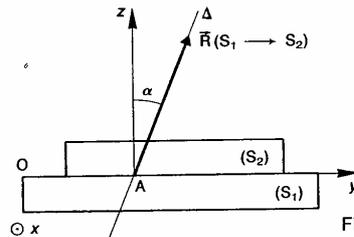


Fig. 28

Dans le cas particulier d'un problème plan, dans un plan (O, \vec{y}, \vec{z}) par exemple, Δ appartient à ce pl et le moment central est nul (figure 28).

REMARQUE

Un problème est plan, dans un plan (P) par exemple, lorsque les torseurs des actions mécaniques agissant sur un ensemble matériel donné sont, soit des torseurs à résultante d'axe cent, situé dans (P), soit des couples de mom résultant perpendiculaire à (P).

Deuxième cas : (S₂) est animé d'un mouvement translation rectiligne par rapport à (S₁).

Ce mouvement est caractérisé par le vecteur vitesse $\vec{V}(P \in S_2/S_1) = V \vec{y}$ avec $V > 0$.

Dans ce cas l'application des lois de Coulomb de davantage de renseignements sur la densité surfacique $\vec{f}_P(S_1 \rightarrow S_2)$ (figure 29).

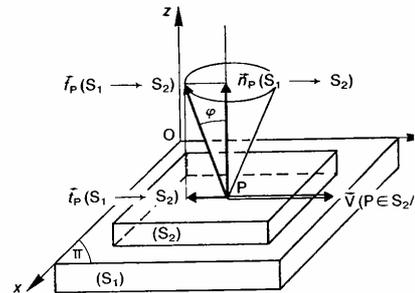


Fig. 29

La densité surfacique tangentielle $q_x \vec{x} + q_y \vec{y}$ doit à même direction que la vitesse de glissements $V \vec{y}$ qui se traduit par la relation :

$$(q_x \vec{x} + q_y \vec{y}) \wedge V \vec{y} = \vec{0}$$

d'où :

$$q_x = 0.$$

Ensuite, la densité surfacique tangentielle doit opposée à la vitesse de glissement.

Soit :

$$q_y \vec{y} \cdot V \vec{y} < 0$$

d'où :

$$q_y < 0.$$

Et pour finir, la norme de la densité surfac tangentielle doit être proportionnelle à la norme de densité surfacique normale

$$\|q_y \vec{y}\| = f \|q_z \vec{z}\|$$

soit :

$$-q_y = f q_z.$$

Par suite, tous les vecteurs densité surfac $\vec{f}_P(S_1 \rightarrow S_2)$ sont parallèles entre eux et la résultante générale du torseur d'action mécanique de (S₁) sur (S₂) a même direction que les vecteurs densité surfacique.

De plus, nous avons vu au paragraphe 1.4.2 que le torseur d'action mécanique associé à un système de forces parallèles est un torseur à résultante. Par conséquent, l'action mécanique de (S_1) sur (S_2) est équivalente à la résultante générale $\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2)$ de support Δ , Δ étant l'axe central du torseur d'action mécanique de (S_1) sur (S_2) . Δ est incliné par rapport à la normale \vec{z} au plan (Π) de l'angle de frottement φ (figure 30).

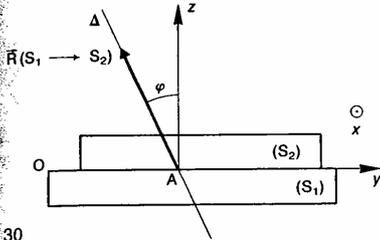


Fig. 30

3.3. SOLIDES EN CONTACT PONCTUEL

Soient 2 solides (S_1) et (S_2) en contact ponctuel en un point P. Soit (Π) le plan tangent commun en P à (S_1) et (S_2) .

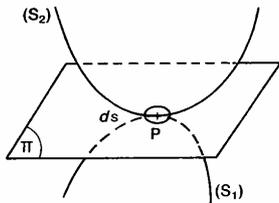


Fig. 31

En fait, le contact réel entre (S_1) et (S_2) , que nous considérons, a lieu sur un petit élément de surface ds contenant le point P.

Le torseur d'action mécanique de contact de (S_1) sur (S_2) s'écrit au point P :

$$\{\mathcal{C}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) \\ \vec{M}_P(S_1 \rightarrow S_2) \end{array} \right\}$$

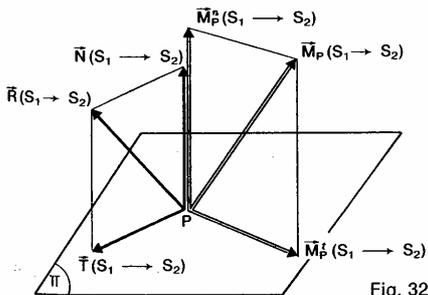


Fig. 32.

Posons :

$$\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) = \vec{N}(S_1 \rightarrow S_2) + \vec{T}(S_1 \rightarrow S_2)$$

avec $\begin{cases} \vec{N}(S_1 \rightarrow S_2) \perp (\Pi) \\ \vec{T}(S_1 \rightarrow S_2) \in (\Pi) \end{cases}$

et

$$\vec{M}_P(S_1 \rightarrow S_2) = \vec{M}_P^n(S_1 \rightarrow S_2) + \vec{M}_P^t(S_1 \rightarrow S_2)$$

avec $\begin{cases} \vec{M}_P^n(S_1 \rightarrow S_2) \perp (\Pi) \\ \vec{M}_P^t(S_1 \rightarrow S_2) \in (\Pi) \end{cases}$.

Définitions

Pour le torseur d'action mécanique de contact de (S_1) sur (S_2) , on appelle :

$\vec{N}(S_1 \rightarrow S_2)$ la composante normale de la résultante générale ou effort normal.

$\vec{T}(S_1 \rightarrow S_2)$ la composante tangentielle de la résultante générale ou effort tangentiel.

$\vec{M}_P^n(S_1 \rightarrow S_2)$ la composante normale du moment résultant au point P ou moment de pivotement.

$\vec{M}_P^t(S_1 \rightarrow S_2)$ la composante tangentielle du moment résultant au point P ou moment de roulement.

Considérons le torseur cinématique du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) , défini au point P.

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S_2/S_1) \\ \vec{V}(P \in S_2/S_1) \end{array} \right\}$$

Posons : $\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{\Omega}_n(S_2/S_1) + \vec{\Omega}_t(S_2/S_1)$

avec $\begin{cases} \vec{\Omega}_n(S_2/S_1) \perp (\Pi) \\ \vec{\Omega}_t(S_2/S_1) \in (\Pi) \end{cases}$.

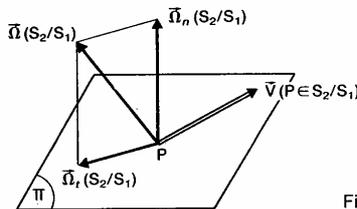


Fig. 33

$\vec{\Omega}_n(S_2/S_1)$ est le vecteur rotation de pivotement et $\vec{\Omega}_t(S_2/S_1)$ est le vecteur rotation de roulement dans le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) .

Rappelons que le vecteur vitesse de glissement $\vec{V}(P \in S_2/S_1)$ est parallèle au plan (Π) .

Lorsque le vecteur vitesse de glissement ou le vecteur rotation de pivotement ou le vecteur rotation de roulement est nul ou pas, on a entre le torseur d'action mécanique de (S_1) sur (S_2) et le torseur cinématique du mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) des relations analogues à celles mises en évidence dans les lois de Coulomb.

Vecteur vitesse de glissement

Premier cas : $\vec{V}(P \in S_2/S_1) \neq \vec{0}$
 $\vec{V}(P \in S_2/S_1) \wedge \vec{T}(S_1 \rightarrow S_2) = \vec{0}$
 $\vec{V}(P \in S_2/S_1) \cdot \vec{T}(S_1 \rightarrow S_2) < 0$
 $\|\vec{T}(S_1 \rightarrow S_2)\| = f \|\vec{N}(S_1 \rightarrow S_2)\|$.

Deuxième cas : $\vec{V}(P \in S_2/S_1) = \vec{0}$
 $\|\vec{T}(S_1 \rightarrow S_2)\| \leq f \|\vec{N}(S_1 \rightarrow S_2)\|$
f est le coefficient de frottement (ou d'adhérence) entre (S₁) et (S₂).

Vecteur rotation de pivotement

Premier cas : $\vec{\Omega}_n(S_2/S_1) \neq \vec{0}$
 $\vec{\Omega}_n(S_2/S_1) \cdot \vec{M}_p^s(S_1 \rightarrow S_2) < 0$
 $\|\vec{M}_p^s(S_1 \rightarrow S_2)\| = \delta \|\vec{N}(S_1 \rightarrow S_2)\|$.

Deuxième cas : $\vec{\Omega}_n(S_2/S_1) = \vec{0}$
 $\|\vec{M}_p^s(S_1 \rightarrow S_2)\| \leq \delta \|\vec{N}(S_1 \rightarrow S_2)\|$.

δ est le paramètre de résistance au pivotement entre (S₁) et (S₂). δ est homogène à une longueur.

Vecteur rotation de roulement

Premier cas : $\vec{\Omega}_t(S_2/S_1) \neq \vec{0}$
 $\vec{\Omega}_t(S_2/S_1) \wedge \vec{M}_p^s(S_1 \rightarrow S_2) = \vec{0}$
 $\vec{\Omega}_t(S_2/S_1) \cdot \vec{M}_p^s(S_1 \rightarrow S_2) < 0$
 $\|\vec{M}_p^s(S_1 \rightarrow S_2)\| = \eta \|\vec{N}(S_1 \rightarrow S_2)\|$.

Deuxième cas : $\vec{\Omega}_t(S_2/S_1) = \vec{0}$
 $\|\vec{M}_p^s(S_1 \rightarrow S_2)\| \leq \eta \|\vec{N}(S_1 \rightarrow S_2)\|$.

η est le paramètre de résistance au roulement entre (S₁) et (S₂). η est homogène à une longueur.

Tableau de quelques valeurs moyennes du paramètre de résistance au roulement

matériaux en contact	η en cm
Acier trempé sur acier trempé	0,0005 à 0,001
Fonte grise sur acier trempé	0,05
Fonte sur sol en bon état	1
Pneus sur sol en bon état	0,5 à 2

Fig. 34

Application

Le schéma cinématique de la figure 35 représente le variateur à plateau déjà rencontré au chapitre 4, paragraphe 4 de cinématique.

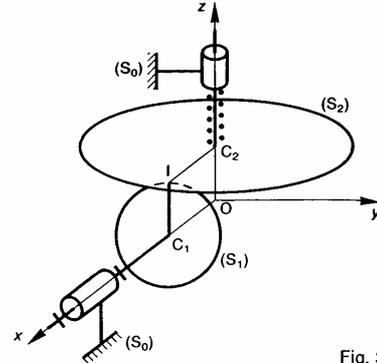


Fig. 35

Soit R(O, \vec{x} , \vec{y} , \vec{z}) un repère lié à un bâti (S₀). Un disque (S₁) de centre C₁, de rayon r₁, a une liaison pivot d'axe (O, \vec{x}) avec (S₀). Le centre C₁ est sur (O, \vec{x}) et le plan de (S₁) est perpendiculaire à (O, \vec{x}). Un plateau circulaire (S₂) de centre C₂ a une liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{z}) avec (S₀). Le centre C₂ est sur (O, \vec{z}) et le plan de (S₂) est perpendiculaire à (O, \vec{z}).

Le plateau circulaire (S₂) roule sans glisser sur le disque (S₁) en un point I tel que :

$$\vec{C_2I} = r_2 \vec{x}$$

On pose : $\vec{\Omega}(S_1/R) = \alpha_1 \vec{x}$.

On a montré en cinématique que :

— Le vecteur rotation de roulement de (S₂) par rapport à (S₁) est :

$$\vec{\Omega}_t(S_2/S_1) = -\alpha_1 \vec{x}$$

— Le vecteur rotation de pivotement de (S₂) par rapport à (S₁) est :

$$\vec{\Omega}_n(S_2/S_1) = -\frac{r_1}{r_2} \alpha_1 \vec{z}$$

Représentons au point I l'action mécanique de contact de (S₁) sur (S₂) par le torseur suivant :

$$\{ \mathcal{C}(S_1 \rightarrow S_2) \} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) \\ \vec{M}_I(S_1 \rightarrow S_2) \end{array} \right\}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}_I(S_1 \rightarrow S_2) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \end{array} \right.$$

et notons entre (S₁) et (S₂) :

- f* : le coefficient de frottement.
- δ : le paramètre de résistance au pivotement.
- η : le paramètre de résistance au roulement.

QUESTION 1

Sachant que (S₂) roule sans glisser sur (S₁), quelle relation y a-t-il entre X, Y, Z?

RÉPONSE

La résultante générale $\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2)$ est à l'intérieur ou à la limite sur le bord de son cône de frottement (axe (I, \vec{z})).

Sachant que l'effort tangentiel est $X\vec{x} + Y\vec{y}$ et l'effort normal $Z\vec{z}$, la relation à vérifier est la suivante :

$$\|X\vec{x} + Y\vec{y}\| \leq f \|Z\vec{z}\|$$

soit, en remarquant que $Z > 0$:

$$\sqrt{X^2 + Y^2} \leq fZ.$$

QUESTION 2

Sachant que le vecteur rotation de pivotement $\vec{\Omega}_n(S_2/S_1)$ est non nul, quelle relation y a-t-il entre Z et N ?

RÉPONSE

Le moment de pivotement est :

$$\vec{M}_I^P(S_1 \rightarrow S_2) = N\vec{z}.$$

Ce moment de pivotement doit être opposé au vecteur rotation de pivotement $\vec{\Omega}_n(S_2/S_1) = -\frac{r_1}{r_2} \alpha_1 \vec{z}$ soit

$$-\frac{r_1}{r_2} \alpha_1 \vec{z} \cdot N\vec{z} < 0$$

d'où :

$$N > 0.$$

De plus la relation entre le moment de pivotement et l'effort normal doit être :

$$\|N\vec{z}\| = \delta \|Z\vec{z}\|.$$

Z et N étant positifs, on obtient :

$$N = \delta Z.$$

QUESTION 3

Sachant que le vecteur rotation de roulement $\vec{\Omega}_r(S_2/S_1)$ est non nul, quelle est la valeur du moment de roulement $\vec{M}_I^P(S_1 \rightarrow S_2)$ et quelle relation y a-t-il entre L et Z ?

RÉPONSE

Le moment de roulement est :

$$\vec{M}_I^P(S_1 \rightarrow S_2) = L\vec{x} + M\vec{y}.$$

Ce moment de roulement doit avoir même direction que le vecteur rotation de roulement $\vec{\Omega}_r(S_2/S_1) = -\alpha_1 \vec{x}$

soit : $-\alpha_1 \vec{x} \wedge (L\vec{x} + M\vec{y}) = \vec{0}$

d'où :

$$M = 0.$$

Ensuite, ce moment de roulement doit être opposé au vecteur rotation de roulement. Soit :

$$-\alpha_1 \vec{x} \cdot L\vec{x} < 0$$

d'où :

$$L > 0.$$

De plus la relation entre le moment de roulement et l'effort normal doit être :

$$\|L\vec{x}\| = \eta \|Z\vec{z}\|.$$

Z et L étant positifs, on obtient :

$$L = \eta Z.$$

Hypothèse du contact rigoureusement ponctuel

Dans cette hypothèse on suppose que le moment résultant $\vec{M}_P(S_1 \rightarrow S_2)$ est nul.

Cette hypothèse est souvent justifiée et facilite grandement les calculs.

3.4. LIAISONS SANS FROTTEMENT

Pour toutes les liaisons théoriques de référence entre deux solides (S_1) et (S_2) étudiées en cinématique au chapitre 1, déterminons les caractéristiques du torseur d'action mécanique de contact $\{\mathcal{C}(S_1 \rightarrow S_2)\}$, que la liaison peut transmettre, lorsque le contact entre (S_1) et (S_2) est supposé sans frottement, c'est-à-dire qu'en chaque point P de la surface de liaison (S) , la densité surfacique $\vec{f}_P(S_1 \rightarrow S_2)$ est perpendiculaire au plan tangent (Π) à (S_1) et (S_2) en ce point (figure 36).

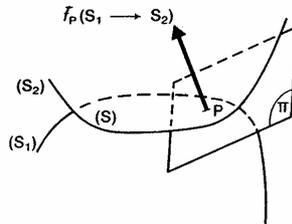


Fig. 36

Le torseur d'action mécanique de contact s'écrit à l'origine du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ placé sur chaque liaison :

$$\{\mathcal{C}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) \\ \vec{M}_O(S_1 \rightarrow S_2) \end{Bmatrix}$$

Nous noterons, quand elles ne sont pas nulles, les composantes des éléments de réduction dans la base de R par :

$$\begin{cases} \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}_O(S_1 \rightarrow S_2) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \end{cases}$$

et nous écrirons le torseur d'action mécanique avec ces composantes de la façon suivante :

$$\{\mathcal{C}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$$

Pour chaque liaison nous préciserons, au préalable, la nature des surfaces de liaison compatible avec le mouvement relatif qu'autorise la liaison, lorsque le contact est direct, c'est-à-dire sans introduction de pièces intermédiaires entre (S_1) et (S_2) .

Lorsqu'une liaison réelle entre deux solides (S_1) et (S_2) a un comportement analogue à un modèle

théorique de référence et que cette liaison n'est pas réalisée par contact direct, mais par association en série ou en parallèle de plusieurs liaisons, comme nous le verrons au *chapitre 3*, il est difficile de parler dans ce cas d'action mécanique de contact si (S_1) et (S_2) ne se touchent pas (exemple : liaison obtenue entre deux bagues d'un roulement par l'intermédiaire des billes). C'est pourquoi l'expression torseur d'action mécanique de contact sera remplacée, dans cette étude, par l'expression *torseur statique*, par analogie avec l'expression torseur cinématique.

3.4.1. Liaison ponctuelle de normale (O, \vec{z})

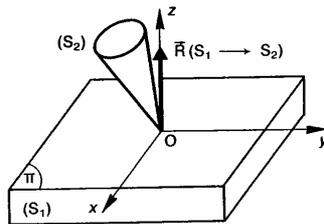


Fig. 37

SURFACE DE LIAISON

Les surfaces de liaison sont par exemple : une surface sphérique en contact en un point avec une surface plane, deux surfaces cylindriques de révolution (d'axes non parallèles) en contact en un point d'une de leur génératrice, etc.

TORSEUR STATIQUE

L'hypothèse d'un contact rigoureusement ponctuel étant tout à fait justifiée pour un contact théorique, nous supposons le moment résultant $\vec{M}_O(S_1 \rightarrow S_2)$ nul (*paragraphe 3.3*). De plus le contact étant sans frottement, la résultante générale $\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2)$ a pour direction \vec{z} . Par conséquent, le torseur statique transmissible par la liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{C}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Z \end{Bmatrix}$$

3.4.2. Liaison linéique rectiligne d'axe (O, \vec{x}) , de normale (O, \vec{z})

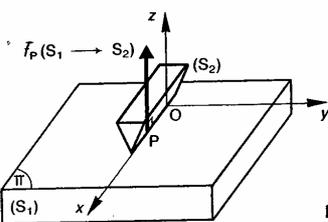


Fig. 38

SURFACES DE LIAISON

Les surfaces de liaison sont par exemple : une surface cylindrique de révolution en contact suivant une génératrice avec une surface plane, etc.

TORSEUR STATIQUE

La densité linéique $\vec{f}_P(S_1 \rightarrow S_2)$, en chaque point P de l'axe (O, \vec{x}) de contact entre (S_1) et (S_2) , est parallèle à \vec{z} . Par suite :

$$\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) = \int_{P \in (O, \vec{x})} \vec{f}_P(S_1 \rightarrow S_2) dx$$

a également pour direction \vec{z} .

Le moment au point O de $\vec{f}_P(S_1 \rightarrow S_2)$ est parallèle à \vec{y} . Par suite :

$$\vec{M}_O(S_1 \rightarrow S_2) = \int_{P \in (O, \vec{x})} \vec{OP} \wedge \vec{f}_P(S_1 \rightarrow S_2) dx$$

a pour direction \vec{y} .

Par conséquent, le torseur statique transmissible par la liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{C}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \\ 0 & Z \end{Bmatrix}$$

3.4.3. Liaison linéique annulaire d'axe (O, \vec{x})

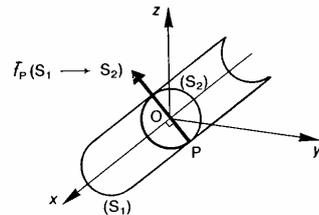


Fig.

SURFACES DE LIAISON

Les surfaces de liaison sont : une surface sphérique de centre O, en contact suivant un grand cercle avec une surface cylindrique de révolution d'axe (O, \vec{x}) , de même rayon.

TORSEUR STATIQUE

Le contact a lieu suivant un grand cercle de surface sphérique liée à (S_2) , situé dans le P (O, \vec{y}, \vec{z}) , si bien que $\vec{f}_P(S_1 \rightarrow S_2)$ passe par C est perpendiculaire à l'axe (O, \vec{x}) .

Par suite $\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2)$ est perpendiculaire à \vec{x} . $\vec{M}_O(S_1 \rightarrow S_2)$ est nul.

Par conséquent, le torseur statique transmissible par la liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{C}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & Z \end{Bmatrix}$$

3.4.4. Liaison rotule de centre O

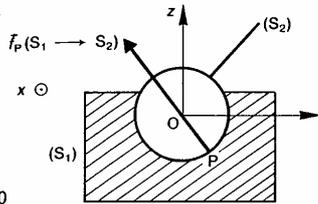


Fig. 40

SURFACES DE LIAISON

Les surfaces de liaison sont deux surfaces sphériques de même rayon, de centre O.

TORSEUR STATIQUE

La densité surfacique $\vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2)$ a la particularité de passer par le point O, par suite son moment par rapport au point O est nul et $\vec{M}_O(S_1 \rightarrow S_2)$ également.

Par conséquent, le torseur statique transmissible par la liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$$

3.4.5. Liaison appui plan de normale (O, \vec{z})

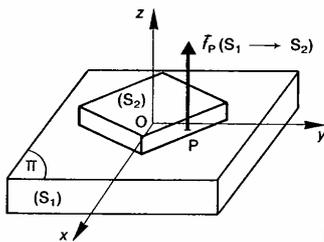


Fig. 41

SURFACES DE LIAISON

Les surfaces de liaison sont deux surfaces planes du plan (O, \vec{x} , \vec{y}).

TORSEUR STATIQUE

La densité surfacique $\vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2)$ est parallèle à \vec{z} , alors son moment au point O est perpendiculaire à \vec{z} .

Par suite $\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2)$ est parallèle à \vec{z} et $\vec{M}_O(S_1 \rightarrow S_2)$ est perpendiculaire à \vec{z} .

Par conséquent, le torseur statique transmissible par la liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$$

3.4.6. Liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{x})

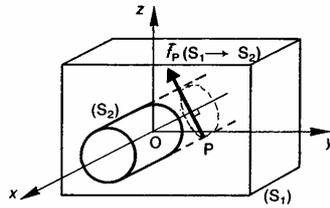


Fig. 42

SURFACES DE LIAISON

Les surfaces de liaison sont des surfaces cylindriques de révolution d'axe (O, \vec{x}).

TORSEUR STATIQUE

La densité surfacique $\vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2)$ a la particularité d'être perpendiculaire à l'axe (O, \vec{x}), alors $\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2)$ l'est également.

$\vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2)$ a aussi la particularité de rencontrer l'axe (O, \vec{x}), ce qui signifie que son moment par rapport à cet axe est nul.

Par suite $\vec{M}_O(S_1 \rightarrow S_2)$ n'a pas de composante sur l'axe (O, \vec{x}).

Par conséquent, le torseur statique transmissible par la liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$$

3.4.7. Liaison glissière hélicoïdale d'axe (O, \vec{x})

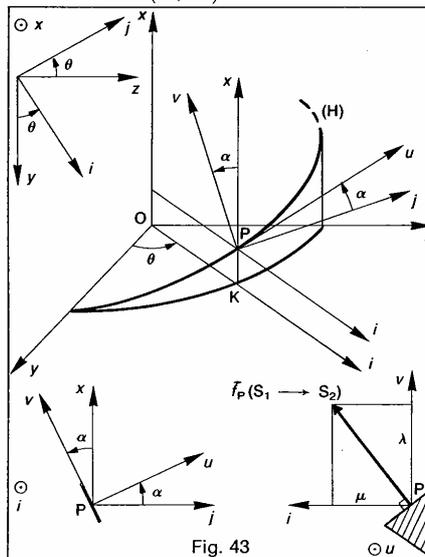


Fig. 43

SURFACES DE LIAISON

Les surfaces de liaison sont des surfaces hélicoïdales d'axe (O, \vec{x}) , de section droite quelconque.

TORSEUR STATIQUE

Supposons le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à (S_1) . Au cours du mouvement relatif de (S_2) par rapport à (S_1) , un point P de contact des surfaces hélicoïdales de liaison, lié à (S_2) , décrit dans le repère R une hélice circulaire (H) d'axe (O, \vec{x}) , de rayon r , d'inclinaison α et de pas réduit p (entre p et α existe la relation : $p = r \operatorname{tg} \alpha$ (figure 44)).

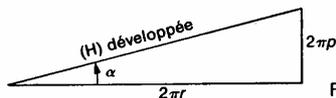


Fig. 44

Soit K la projection orthogonale du point P sur le plan (O, \vec{y}, \vec{z}) . Notons \vec{i} le vecteur unitaire de même direction et de même sens que le vecteur \vec{OK} et \vec{j} , le troisième vecteur unitaire de la base orthonormée directe $(\vec{x}, \vec{i}, \vec{j})$.

La position du point P dans R est définie par l'angle $\theta = (\vec{x}, \vec{i})$.

Alors : $KP = p\theta$ ou $r\theta \operatorname{tg} \alpha$.

Soit \vec{u} le vecteur unitaire tangent en P à l'hélice (H) et \vec{v} le troisième vecteur unitaire de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{u}, \vec{v})$.

Alors : $(\vec{j}, \vec{u}) = (\vec{x}, \vec{v}) = \alpha$.

Le profil de la section droite qui engendre la surface hélicoïdale de liaison se trouve dans le plan (P, \vec{v}, \vec{i}) . Le vecteur vitesse de glissement entre les deux surfaces hélicoïdales, au point P , a pour direction \vec{u} , par conséquent d'après les lois de Coulomb énoncées au paragraphe 3.2, la densité surfacique $\vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2)$ est perpendiculaire à \vec{u} . Posons donc :

$$\vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2) = \lambda \vec{v} + \mu \vec{i}$$

(λ et μ sont des fonctions du point P considéré). Comme la rotation autour de (O, \vec{x}) et la translation suivant (O, \vec{x}) de (S_2) par rapport à (S_1) sont liées, il doit certainement en être de même pour la composante de $\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2)$ sur \vec{x} et la composante de $\vec{M}_0(S_1 \rightarrow S_2)$ sur \vec{x} .

Pour mettre en évidence cette relation calculons

$$\vec{x} \cdot \vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2) \text{ et } \vec{x} \cdot (\vec{OP} \wedge \vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2)).$$

Le premier terme est égal à :

$$\vec{x} \cdot \vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2) = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{v} + \mu \vec{i})$$

en remarquant que \vec{x} est perpendiculaire à \vec{i} et que $\vec{x} \cdot \vec{v} = \cos \alpha$:

$$\vec{x} \cdot \vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2) = \lambda \cos \alpha \tag{4}$$

en notant que : $\vec{OP} = r\vec{i} + p\theta\vec{x}$, le deuxième terme s'écrit :

$$\vec{x} \cdot (\vec{OP} \wedge \vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2)) = \vec{x} \cdot [(r\vec{i} + p\theta\vec{x}) \wedge (\lambda \vec{v} + \mu \vec{i})]$$

en remarquant que :

$$\begin{cases} \vec{i} \wedge \vec{v} = -\vec{u} \\ \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0} \\ \vec{x} \wedge \vec{v} = \sin \alpha \vec{i} \\ \vec{x} \wedge \vec{i} = \vec{j} \end{cases}$$

on obtient :

$$\vec{x} \cdot (\vec{OP} \wedge \vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2)) = \vec{x} \cdot (-r\lambda \vec{u} + \lambda p\theta \sin \alpha \vec{i} + \mu p\theta \vec{j})$$

soit avec :

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{u} = \sin \alpha \\ \vec{x} \cdot \vec{i} = 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{j} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{x} \cdot (\vec{OP} \wedge \vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2)) = -r\lambda \sin \alpha$$

Comme $p = r \operatorname{tg} \alpha$

ou $p \cos \alpha = r \sin \alpha$

$$\vec{x} \cdot (\vec{OP} \wedge \vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2)) = -p\lambda \cos \alpha \tag{5}$$

Par suite avec les résultats obtenus dans les relations (4) et (5) on a l'égalité suivante :

$$\vec{x} \cdot (\vec{OP} \wedge \vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2)) = -p\vec{x} \cdot \vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2)$$

En intégrant les deux membres de cette égalité sur la surface de contact entre (S_1) et (S_2) , on obtient entre $\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2)$ et $\vec{M}_0(S_1 \rightarrow S_2)$ la relation :

$$\vec{x} \cdot \vec{M}_0(S_1 \rightarrow S_2) = -p\vec{x} \cdot \vec{R}(S_1 \rightarrow S_2)$$

Par conséquent le torseur statique transmissible par la liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$$

avec

$$L = -pX$$

3.4.8. Liaison glissière d'axe (O, \vec{x})

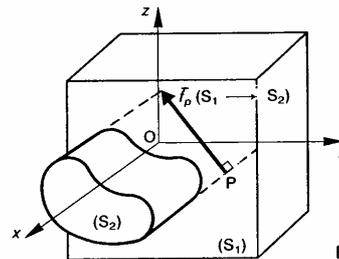


Fig. 45

SURFACES DE LIAISON

Les surfaces de liaison sont des surfaces cylindriques, non de révolution, de génératrices parallèles à \vec{x} .

TORSEUR STATIQUE

La densité surfacique $\vec{f}_p(S_1 \rightarrow S_2)$ est perpendiculaire à la direction \vec{x} du déplacement alors $\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2)$ est aussi perpendiculaire à \vec{x} . Par conséquent, le torseur statique transmissible par la liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$$

3.4.9. Liaison pivot d'axe (O, x)

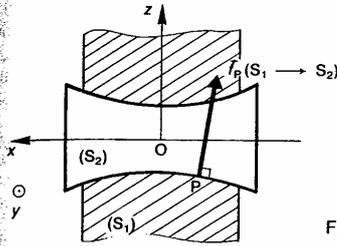


Fig. 46

SURFACES DE LIAISON

Les surfaces de liaison sont des surfaces de révolution, non cylindriques, autour de l'axe (O, x).

REMARQUE

En pratique une telle liaison est généralement réalisée par association d'une liaison pivot glissant et d'une liaison appui plan.

TORSEUR STATIQUE

La densité surfacique $f_p(S_1 \rightarrow S_2)$ rencontre l'axe de rotation (O, x). Par suite, son moment par rapport à cet axe est nul et $\vec{M}_O(S_1 \rightarrow S_2)$ n'a pas de composante sur l'axe (O, x).

Par conséquent, le torseur statique transmissible par la liaison est de la forme :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$$

3.4.10. Liaison encastrement

Dans ce cas les surfaces de liaison doivent empêcher tout mouvement relatif entre (S₁) et (S₂). Par suite, le torseur statique transmissible par la liaison n'a aucune composante nulle :

$$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$$

3.4.11. Tableau récapitulatif

Dans le tableau présenté figure 47 sont indiqués les torseurs statiques des liaisons sans frottement étudiées précédemment, ainsi que les points où les torseurs conservent leurs composantes nulles (colonne « forme particulière conservée » du tableau).

Si on compare le torseur statique d'une liaison sans frottement avec son torseur cinématique (figure 7 du chapitre 3 de cinématique) on constate que la somme :

$$\vec{R}(S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{V}(O \in S_2/S_1) + \vec{M}_O(S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{\Omega}(S_2/S_1)$$

est toujours nulle.

Cette propriété sera expliquée au chapitre 3 de dynamique. Elle traduit le fait que la puissance des actions mutuelles de contact est nulle dans une liaison sans frottement.

TORSEURS STATIQUES DES LIAISONS

Liaison	$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\}$	Forme particulière conservée	Liaison	$\{\mathcal{T}(S_1 \rightarrow S_2)\}$	Forme particulière conservée
ponctuelle de normale (O, z)	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$	points de (O, z)	pivot glissant d'axe (O, x)	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$	points de (O, x)
linéique rectiligne d'axe (O, x) de normale (O, z)	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$	points du plan (O, z, x)	glissière hélicoïdale d'axe (O, x)	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$ avec $L = -pX$	points de (O, x)
linéique annulaire d'axe (O, x)	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$	au point O	glissière d'axe (O, x)	$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$	en tout point
rotule de centre O	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$	au point O	pivot d'axe (O, x)	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$	points de (O, x)
appui plan de normale (O, z)	$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$	en tout point	encastrement	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$	en tout point

Fig. 47

A SAVOIR

1. Le premier principe de la statique : toute action mécanique est entièrement caractérisée, d'un point de vue mécanique, par un forceur.

2. La relation vectorielle donnant la position du centre d'inertie G d'un ensemble matériel (E) :

$$\overline{AG} = \frac{1}{m} \int_{P \in E} \overline{AP} dm \quad (\forall A)$$

Si on considère une partition de E en n éléments $E_i (m_i, G_i)$

$$\overline{AG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \overline{AG_i} \quad (\forall A)$$

3. Les lois de Coulomb : si dans l'action mécanique de contact de (S_1) sur (S_2) , on appelle au point P :

$\vec{n}_P(S_1 \rightarrow S_2)$ la densité surfacique normale,

$\vec{t}_P(S_1 \rightarrow S_2)$ la densité surfacique tangentielle,

et si dans le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) , on appelle au point P :

$\vec{v}(P \in S_2/S_1)$ le vecteur vitesse de glissement, les lois de Coulomb se résument ainsi :

Premier cas : $\vec{v}(P \in S_2/S_1) \neq 0$
 alors : $\vec{t}_P(S_1 \rightarrow S_2) \wedge \vec{v}(P \in S_2/S_1) = 0$
 $\vec{t}_P(S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{v}(P \in S_2/S_1) < 0$
 $\|\vec{t}_P(S_1 \rightarrow S_2)\| = f \|\vec{n}_P(S_1 \rightarrow S_2)\|$

Deuxième cas : $\vec{v}(P \in S_2/S_1) = 0$
 alors : $\|\vec{t}_P(S_1 \rightarrow S_2)\| \leq f \|\vec{n}_P(S_1 \rightarrow S_2)\|$

PROBLÈME RÉSOLU

Sur un broyeur de paille, attelé à un tracteur agricole, le moment du couple transmissible par le moteur est limité par un limiteur de couple à roues coniques dont le schéma cinématique est donné figure 48.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié au carter (0) du limiteur de couple. La roue conique motrice (3) a une liaison glissière d'axe (O, \vec{y}) avec l'arbre moteur (1) qui a, ainsi que la roue conique réceptrice (2), une liaison pivot d'axe (O, \vec{y}) avec le carter (0).

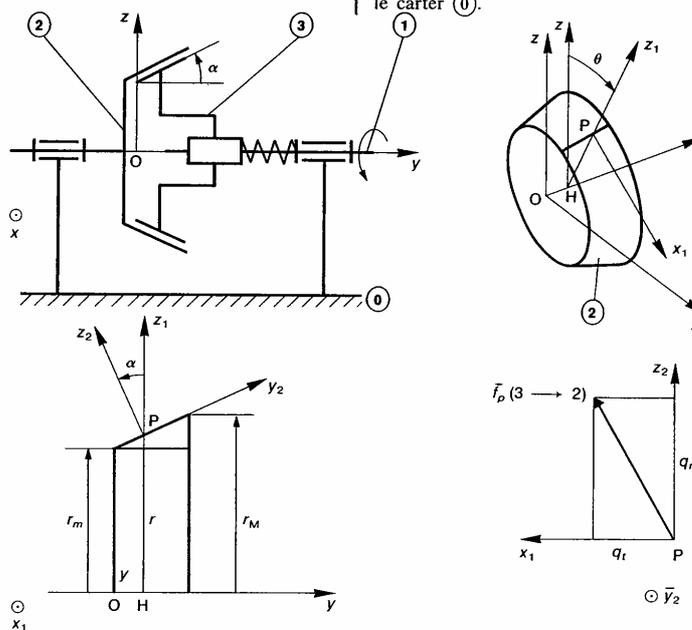


Fig. 48

l'angle α le demi-angle au sommet des troncs de cône, et r_m et r_M les rayons minimum et maximum des cercles de section droite de la surface conique de contact entre (2) et (3).

Soient q_n la pression de contact, supposée uniforme, de l'action mécanique de (3) sur (2), et f le coefficient de frottement des surfaces en contact.

Notons :
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(3 \rightarrow 2) \\ \vec{M}_O(3 \rightarrow 2) \end{array} \right\}$$

le torseur d'action mécanique de contact de la roue (3) sur la roue (2).

On pose :
$$\left\{ \begin{array}{l} F = -\vec{y} \cdot \vec{R}(3 \rightarrow 2) \\ C = \vec{y} \cdot \vec{M}_O(3 \rightarrow 2) \end{array} \right.$$

F représente l'effort presseur exercé axialement par la roue (3) sur la roue (2).

C représente le moment du couple transmis par le limiteur de couple.

Le but de l'étude est la détermination du moment maximum C_M que peut transmettre ce mécanisme. Pour cela nous considérerons les roues (2) et (3) à la limite du glissement.

Dans cette hypothèse nous pourrions définir complètement, en chaque point P de la surface de contact, le vecteur densité surfacique $\vec{f}_P(3 \rightarrow 2)$.

Supposons qu'à la limite du glissement, le vecteur rotation de (2) par rapport à (3) soit de la forme : $\vec{\Omega}(2/3) = \omega \vec{y}$ avec $\omega < 0$.

QUESTION 1

Paramétrer la position d'un point P quelconque de la surface de contact de la roue (2) par rapport au repère R. Préciser la direction de la normale en ce point.

RÉPONSE

Soit H la projection orthogonale du point P considéré sur l'axe (O, \vec{y}).

Soit $R_1(H, \vec{x}_1, \vec{y}, \vec{z}_1)$ le repère tel que le vecteur unitaire \vec{z}_1 ait même direction et même sens que le vecteur \vec{HP} .

On pose :
$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = (\vec{z}_1, \vec{x}_1) \\ y = \vec{OH} \\ r = \vec{HP} \end{array} \right.$$

Soit $R_2(P, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ le repère tel que l'angle $(\vec{z}_1, \vec{z}_2) = \alpha$.

Le vecteur unitaire \vec{z}_2 est normal en P à la surface conique.

QUESTION 2

Déterminer les composantes du vecteur densité surfacique $\vec{f}_P(3 \rightarrow 2)$ dans la base du repère

local $R_2(P, \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, en fonction du coefficient de frottement f et de la pression de contact q_n entre (2) et (3).

RÉPONSE

Lorsqu'il y a rotation relative de (2) par rapport à (3), calculons le vecteur vitesse de glissement du point P dans le mouvement de (2) par rapport à (3) : $\vec{V}(P \in 2/3)$.

Appliquons la relation entre les vecteurs vitesse des points P et H de (2), par rapport à (3)

$$\vec{V}(P \in 2/3) = \vec{V}(H \in 2/3) + \vec{\Omega}(2/3) \wedge \vec{HP}$$

Le point H étant sur l'axe de rotation (O, \vec{y}) commun à (2) et (3) : $\vec{V}(H \in 2/3) = \vec{0}$ par suite :

$$\vec{V}(P \in 2/3) = \omega \vec{y} \wedge r \vec{z}_1$$

$$\vec{V}(P \in 2/3) = \omega r \vec{x}_1$$

comme $\omega < 0$, le vecteur $\vec{V}(P \in 2/3)$ a une composante négative sur \vec{x}_1 , alors la densité surfacique tangentielle de l'action mécanique de contact de (3) sur (2) a même direction et même sens que \vec{x}_1 .

Par suite, on peut poser :

$$\vec{f}_P(3 \rightarrow 2) = q_n \vec{z}_2 + q_t \vec{x}_1$$

avec : q_n et $q_t > 0$

et : $q_t = f q_n$

alors :
$$\vec{f}_P(3 \rightarrow 2) = q_n \vec{z}_2 + f q_n \vec{x}_1 \quad (6)$$

QUESTION 3

Déterminer la pression de contact q_n en fonction de l'effort presseur F.

RÉPONSE

$$F = -\vec{y} \cdot \vec{R}(3 \rightarrow 2)$$

Comme :
$$\vec{R}(3 \rightarrow 2) = \int_{P \in S} \vec{f}_P(3 \rightarrow 2) ds$$

(S : surface de contact entre (2) et (3)) l'expression de F s'écrit en tenant compte de (6) :

$$F = \int_{P \in S} -\vec{y} \cdot (q_n \vec{z}_2 + f q_n \vec{x}_1) ds$$

Sachant que q_n est constant, et que

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{y} \cdot \vec{z}_2 = -\sin \alpha \\ \vec{y} \cdot \vec{x}_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$F = q_n \sin \alpha \int_{P \in S} ds$$

soit : $F = q_n \sin \alpha \cdot S$

S représentant l'aire de la surface de contact entre (2) et (3), notée également S.

La surface latérale du tronc de cône s'obtient facilement par application du premier théorème de Guldin (figure 49).

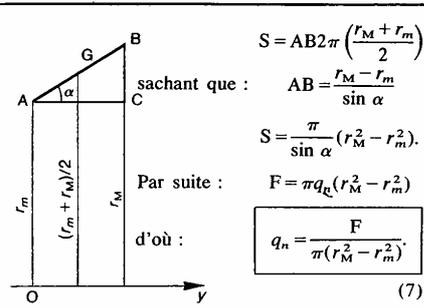


Fig. 49

QUESTION 4

Déterminer le moment maximum C_M du couple transmissible par le limiteur de couple, en fonction de l'effort presseur F .

RÉPONSE

$$C = \vec{y} \cdot \vec{M}_O(3 \rightarrow 2).$$

Comme :

$$\vec{M}_O(3 \rightarrow 2) = \int_{P \in S} \vec{OP} \wedge \vec{f}_p(3 \rightarrow 2) ds$$

l'expression de C_M s'écrit en tenant compte de (6) :

$$C_M = \int_{P \in S} \vec{y} \cdot [\vec{OP} \wedge (q_n \vec{z}_2 + f q_n \vec{x}_1)] ds$$

remplaçons \vec{OP} par $y\vec{y} + r\vec{z}_1$ et inversons les produits scalaire et vectoriel du produit mixte écrit sous le signe somme.

$$C_M = \int_{P \in S} [\vec{y} \wedge (y\vec{y} + r\vec{z}_1)] \cdot (q_n \vec{z}_2 + f q_n \vec{x}_1) ds$$

avec :

$$\begin{cases} \vec{y} \wedge \vec{y} = \vec{0} \\ \vec{y} \wedge \vec{z}_1 = \vec{x}_1. \end{cases}$$

$$C_M = \int_{P \in S} r \vec{x}_1 \cdot (q_n \vec{z}_2 + f q_n \vec{x}_1) ds$$

en remarquant que : $\begin{cases} \vec{x}_1 \cdot \vec{z}_2 = 0 \\ \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1 = 1 \end{cases}$

$$C_M = f q_n \int_{P \in S} r ds.$$

Si on choisit comme élément d'intégration des troncs de cône d'épaisseur dy , de rayon r , de pour expression :

$$ds = 2\pi r \frac{dy}{\cos \alpha}$$

or $r = r_m + y \operatorname{tg} \alpha$

différentions cette égalité pour obtenir dy .

$$dr = \operatorname{tg} \alpha dy$$

alors $dy = \frac{dr}{\operatorname{tg} \alpha}$ (si $\alpha \neq 0$)

et $ds = \frac{2\pi}{\sin \alpha} r dr$.

Par suite

$$C_M = \frac{2\pi f q_n}{\sin \alpha} \int_{r_m}^{r_M} r^2 dr$$

soit $C_M = \frac{2\pi f q_n}{3 \sin \alpha} (r_M^3 - r_m^3)$

avec l'expression de q_n obtenue en (7) :

$$C_M = \frac{2fF}{3 \sin \alpha} \frac{r_M^3 - r_m^3}{r_M^2 - r_m^2}$$

REMARQUE

Dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (surfaces de contact planes) :

$$C_M = \frac{2}{3} fF \frac{r_M^3 - r_m^3}{r_M^2 - r_m^2}$$

et si de plus r_M et r_m sont peu différents, peut assimiler le terme :

$$\frac{2}{3} \frac{r_M^3 - r_m^3}{r_M^2 - r_m^2} \approx r = \frac{r_M + r_m}{2}$$

alors :

$$C_M = r f F.$$

CONSEILS POUR LA RÉSOLUTION

1. Le moment résultant en un point d'un système de n forces n'est pas le moment en ce point de la résultante de ces forces, sauf si le torseur associé à ces n forces est à résultante, car dans ce cas le moment central est nul.

2. Pour appliquer le lois de Coulomb dans le cas où le vecteur vitesse de glissement n'est pas nul, il faut considérer l'action mécanique de (S_1) sur (S_2) et le mouvement de (S_2) par rapport à (S_1) .

3. L'hypothèse qui consiste à se placer à la limite du glissement pour résoudre certains problèmes doit être compatible avec les équations de la statique, le principe fondamental de la statique, ce que nous le verrons au chapitre 2, et sa validité être vérifiée une fois les calculs faits.

4. Les torseurs statiques des liaisons mis en évidence dans le cours ne sont valables que pour des liaisons sans frottement.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

Déterminer le centre d'inertie :
 a) d'un cône de révolution de hauteur h , de rayon de base r , homogène, creux et d'épaisseur négligeable, sans la base (figure 50),

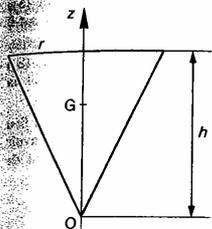


Fig. 50

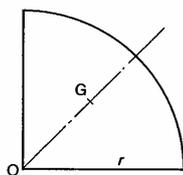


Fig. 51

b) d'une plaque homogène, d'épaisseur négligeable, ayant la forme d'un quart de cercle de rayon r (figure 51).

RÉPONSES

a) $OG = \frac{2}{3} h$.

b) $OG = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} r$.

2. — Un barrage poids en béton (masse volumique ρ_b), cylindrique, de section droite trapézoïdale (largeurs a et b , hauteur h) repose sur un massif poreux (figure 52).

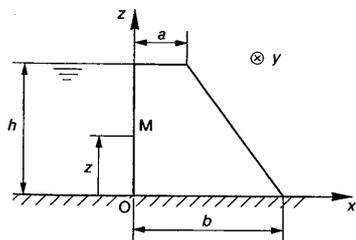


Fig. 52

L'eau exerce sur la paroi verticale du barrage une action mécanique définie par la densité surfacique : $\vec{f}_M = \rho_e g (h-z) \vec{x}$ avec :

- ρ_e : masse volumique de l'eau
- g : accélération de la pesanteur
- z : abscisse du point M.

On donne :

$$\rho_b = 2,5 \text{ kg/dm}^3, \quad \rho_e = 1 \text{ kg/dm}^3, \quad a = 5 \text{ m}$$

$$b = 20 \text{ m}, \quad h = 30 \text{ m}, \quad g = 9,81 \text{ m/s}^2.$$

QUESTIONS

En ne considérant que l'unité de longueur du barrage :

1° Déterminer au point O le torseur d'action mécanique de l'eau sur le barrage.

Montrer que ce torseur est à résultante. Donner la valeur numérique de sa résultante \vec{F} . Déterminer la position de son axe central Δ .

2° Calculer le poids \vec{P} du barrage ainsi que la position de son centre de gravité G suivant l'axe (O, \vec{x}) .

3° Anticipons sur le prochain chapitre (principe fondamental de la statique) : Soit \vec{R} la résultante générale du torseur d'action mécanique du sol sur le barrage. Sachant que le barrage est en équilibre par rapport au sol, déterminer :

a) Le point d'intersection I de l'axe central du torseur d'action mécanique du sol sur le barrage avec l'axe (O, \vec{x}) .

b) La valeur minimum du coefficient de frottement f entre le sol et le barrage pour que le barrage ne glisse pas sur le sol.

RÉPONSES

$$1^\circ \{ \mathcal{C}(\text{eau} \rightarrow \text{barrage}) \} = \begin{cases} \rho_e g \frac{h^2}{2} \vec{x} \\ \rho_e g \frac{h^3}{6} \vec{y} \end{cases}$$

— Les deux éléments de réduction du torseur sont perpendiculaires, par conséquent le torseur est à résultante.

— $\|\vec{F}\| = 4,41 \cdot 10^6 \text{ N}$.

— Le pied H de la perpendiculaire abaissée de O sur Δ est défini par le vecteur $\vec{OH} = \frac{h}{3} \vec{x}$ (figure 53).

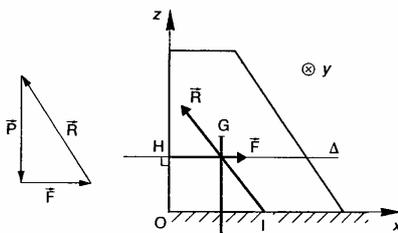


Fig. 53

2° $\|\vec{F}\| = 9,2 \cdot 10^6 \text{ N}$, $x_G = \frac{a^2 + b^2 + ab}{3(a+b)}$.

3° a) $x_1 = \frac{1}{3(a+b)} \left(a^2 + b^2 + ab + \frac{\rho_c}{\rho_b} h^2 \right)$
 $x_1 = 11,8 \text{ m}$,

b) $f > \frac{\rho_c}{\rho_b} \frac{h}{a+b}$ d'où $f > 0,48$.

3 — Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié à un bâti (S_0). Deux roues coniques (S_1) et (S_2) en rotation par rapport au bâti (S_0) autour des axes parallèles (O, \vec{z}_0) et (A, \vec{z}_0) ont pour demi-angle au sommet α et pour rayon moyen r_1 et r_2 respectivement (figure 54).

On pose :

$$\begin{cases} \vec{\Omega}(S_1/R_0) = \omega_1 \vec{z}_0 & \text{avec } \omega_1 > 0. \\ \vec{\Omega}(S_2/R_0) = -\omega_2 \vec{z}_0 \end{cases}$$

(S_1) et (S_2) sont en contact suivant une faible longueur de génératrice, si bien que le contact peut être assimilé à un contact ponctuel au point I.

On pose :

$$\begin{cases} \vec{OI} = r_1 \vec{y}_0 \\ \vec{IA} = r_2 \vec{y}_0 \end{cases}$$

Les roues (S_1) et (S_2) roulent sans glisser l'une sur l'autre au point I.

Soit $R(I, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère tel que l'axe (I, \vec{y}) ait même direction que la génératrice de contact des surfaces coniques. Soit :

$$\{ \mathcal{C}(S_2 \rightarrow S_1) \} = \begin{cases} X\vec{x}_0 + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ L\vec{x}_0 + M\vec{y} + N\vec{z} \end{cases}$$

Le torseur d'action mécanique de (S_2) sur (S_1), au point I.

Notons entre les surfaces (S_1) et (S_2) :

$$\begin{cases} f : \text{le coefficient de frottement} \\ \delta : \text{le paramètre de résistance au pivotement} \\ \eta : \text{le paramètre de résistance au roulement.} \end{cases}$$

QUESTIONS

1° Dans le mouvement de (S_1) par rapport à (Δ) déterminer le vecteur rotation de pivotement et le vecteur rotation de roulement en fonction de r_1, r_2, ω_1 et

2° Sachant que (S_1) roule sans glisser sur (S_2) au point quelle relation y a-t-il entre X, Y et Z?

3° Sachant que le vecteur rotation de pivotement de (Δ) par rapport à (S_2) n'est pas nul, quelle relation y a-t-il entre N et Z?

4° Sachant que le vecteur rotation de roulement de (Δ) par rapport à (S_2) n'est pas nul, déterminer L et relation entre M et Z.

5° Si on considère que le contact entre (S_1) et (S_2) a lieu suivant une génératrice, montrer qu'il ne peut y avoir qu'un seul point où le vecteur vitesse de glissement (S_1) par rapport à (S_2) soit nul.

RÉPONSES

1° $\vec{\Omega}_n(S_1/S_2) = \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) \omega_1 \sin \alpha \vec{z}$

$\vec{\Omega}_r(S_1/S_2) = \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) \omega_1 \cos \alpha \vec{y}$

2° $\|X\vec{x} + Y\vec{y}\| \leq fZ$.

3° $-N = \delta Z$.

4° $L = 0$.

$-M = \eta Z$.

5° Les points de l'axe central Δ du torseur cinématique du mouvement de (S_1) par rapport à (S_2) ont un vecteur vitesse nul.

Or Δ a même direction que la résultante générale $\vec{\Omega}(S_1/S_2) = (\omega_1 + \omega_2) \vec{z}_0$ de ce torseur.

Δ ne peut donc couper la génératrice de contact entre (S_1) et (S_2) qu'en un seul point.

Par conséquent, il n'y a qu'un seul point où il n'y a pas de glissement. Ce point n'est pas nécessairement le point I.

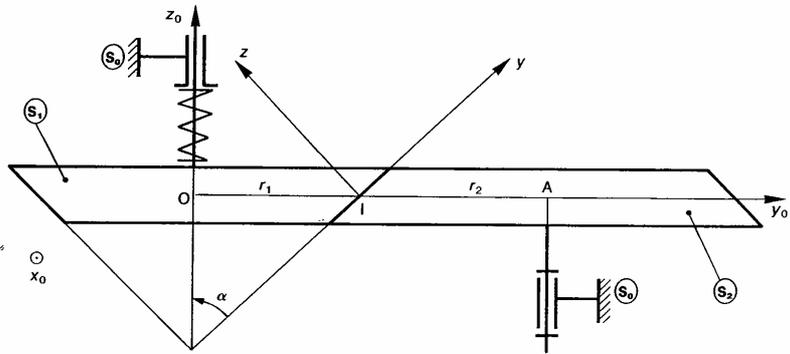


Fig. 54

La butée Michell employée dans la construction d'un groupe turbo-alternateur hydraulique, se compose d'un arbre vertical reposant, par l'intermédiaire d'un patin d'huile, sur une couronne de 8 patins articulés (figure 55).
 L'arbre tourne à la vitesse angulaire de 100 tr/min. La charge verticale que doit supporter la butée est $P = 6 \cdot 10^6$ N.
 La partie active d'un patin est assimilable à un carré de côté $l = 50$ cm, dont la section médiane est tangente au cercle de rayon $r = 75$ cm.

On montre, en première approximation, que la loi de répartition des pressions entre le patin et la base de l'arbre est uniquement une fonction de l'abscisse x du point considéré, dont l'expression est

$$p(x) = \frac{6\mu Vx(l-x)}{a^2(2a-l)(a-x)^2}$$

avec
 μ : viscosité dynamique de l'huile (en poiseuille)

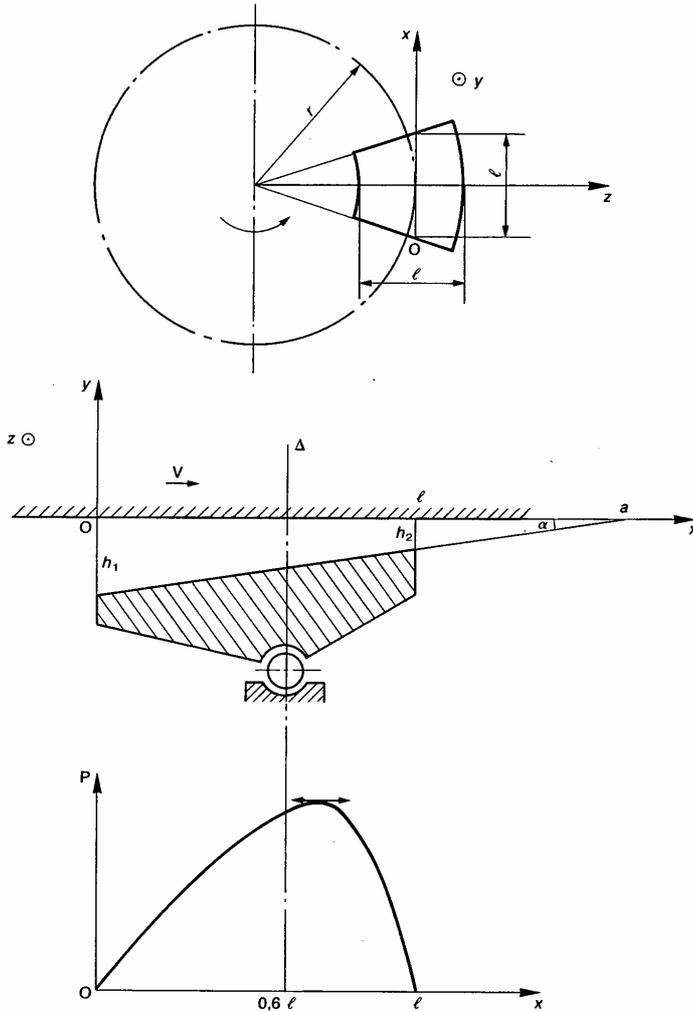


Fig. 55

V : vitesse d'un point de l'arbre sur le cercle d'un rayon r (en m/s)
 α : angle d'inclinaison du patin (en radians)
 l : longueur du patin (en m)
 a : longueur telle que $h_2 = (a-l) \operatorname{tg} \alpha$
 h_2 est la hauteur du film d'huile à la sortie du patin (en m).

On donne :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{100} \text{ de degré} \\ h_2 = 0,05 \text{ mm.} \end{cases}$$

QUESTIONS

1° Déterminer la résultante générale \vec{R} des forces de pression s'exerçant sur la base inférieure de l'arbre, par unité de largeur du patin.

2° Quelle doit être la viscosité dynamique de l'huile pour obtenir les conditions de fonctionnement indiquées?

3° Déterminer le support Δ de la résultante générale des forces de pression s'exerçant sur la surface du patin.

RÉPONSES

1° Sachant que

$$\frac{x(l-x)}{(a-x)^2} = -1 + \frac{2a-l}{a-x} - \frac{a(a-l)}{(a-x)^2}$$

On trouve :

$$\vec{R} = \frac{6\mu V}{\alpha^2} \left[\ln \frac{a}{a-l} - \frac{2l}{2a-l} \right] \vec{y}$$

2° La viscosité dynamique est :

$$\mu = 0,0122 \text{ Pl (poiseuille)}$$

En réalité la viscosité dynamique adoptée est $\frac{9}{4}$ fois plus grande que celle calculée, à cause des fuites latérales. Soit :

$$\mu = 0,0275 \text{ Pl (poiseuille)}$$

ou $\mu = 27,5 \text{ cPo (centipoise)}$.

(Pour fixer les idées, la viscosité de l'eau à 20 °C est 1 cPo.)

3° Sachant que :

$$\frac{x^2(l-x)}{(a-x)^2} = -(x+2a-l) + \frac{a(3a-2l)}{a-x} - \frac{a^2(a-l)}{(a-x)^2}$$

On trouve que le moment résultant \vec{M}_0 des forces de pression s'exerçant sur la surface du patin, par unité de largeur, est :

$$\vec{M}_0 = \frac{3\mu V}{\alpha^2(2a-l)} \left[l(6a-l) - 2a(3a-2l) \ln \frac{a}{a-l} \right] \vec{z}$$

Par suite Δ se trouve à une distance de $0,6 l$ de l'a (O, \vec{y}). Cette distance détermine la position de l'axe de rotation du patin.

5 — Une vanne schématisée par un secteur circulaire de centre C, de rayon r , ferme une retenue d'eau par laquelle la hauteur de la surface libre est h (figure :

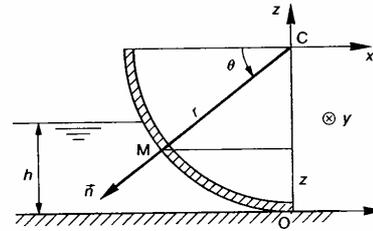


Fig. 56

L'eau exerce sur la surface du secteur une action mécanique définie par la densité surfacique :

$$\vec{f}_M = -\rho_e g(h-z) \vec{n}$$

avec :

- ρ_e : masse volumique de l'eau
- g : accélération de la pesanteur
- z : abscisse du point M
- \vec{n} : vecteur unitaire normal à la surface de contour dirigé vers l'extérieur du secteur.

On donne :

$$\begin{cases} \rho_e = 1 \text{ kg/dm}^3 \\ g = 9,81 \text{ m/s}^2 \\ r = 1,2 \text{ m} \\ h = 0,6 \text{ m.} \end{cases}$$

QUESTIONS

En ne considérant que l'unité de longueur de la vanne

1° Déterminer la résultante générale \vec{R} du torseur d'action mécanique de l'eau sur la vanne.

2° En déduire l'orientation de l'axe central Δ du torseur d'action mécanique.

RÉPONSES

- 1° $\|\vec{R}\| = 469 \text{ daN}$ et $(\vec{x}, \vec{R}) = 67,85 \text{ degrés}$
- 2° Δ a même direction que \vec{R} .

EXERCICES SANS RÉPONSES

Déterminer le centre d'inertie :
 6) d'une demie sphère de rayon r , pleine et homogène (figure 57).

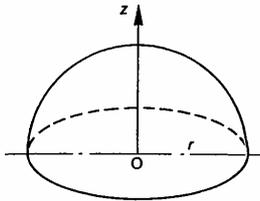


Fig. 57

7) d'une plaque homogène, d'épaisseur négligeable, ayant la forme indiquée sur la figure 58 $OA = AB = r$.

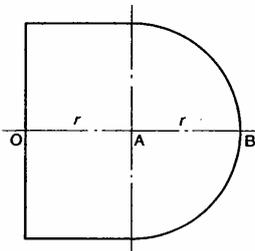


Fig. 58

7.— Une poutre droite de section carrée est encadrée dans un mur. A son extrémité A s'exerce une action mécanique représentée par la force $(A, -F\vec{z})$ (figure 59).

Afin d'évaluer les pressions de contact qu'exerce la poutre sur le mur, on adopte des lois de répartition de pression linéaires en fonction de y , et constantes en fonction de x , sur les faces supérieure et inférieure de la poutre, comme indiqué sur la figure.

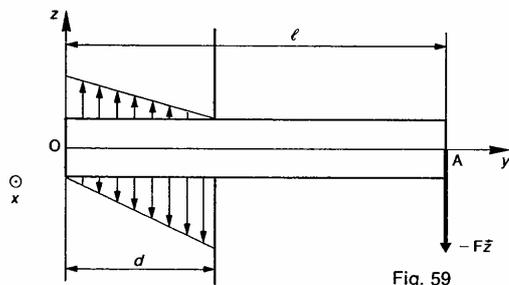


Fig. 59

QUESTIONS

Sachant que ces pressions de contact ont une action mécanique équivalente à la force $(A, -F\vec{z})$, déterminer :

1° La loi de répartition des pressions de contact en tout point de la face supérieure et de la face inférieure de la poutre.

2° En déduire la valeur maximum de la pression de contact qu'exerce la poutre sur le mur.

REMARQUE

Deux actions mécaniques sont équivalentes quand on peut les représenter par un même torseur.

8 — Deux rotors verticaux de 2 mètres de diamètre et de 8 mètres de hauteur, en rotation autour de leur axe à la vitesse angulaire de 200 tr/min, sont utilisés pour la propulsion d'un navire (figure 60).

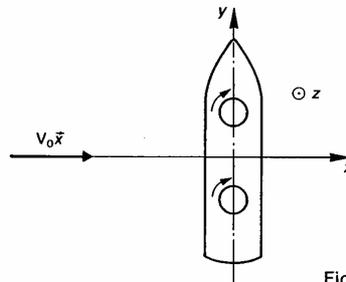
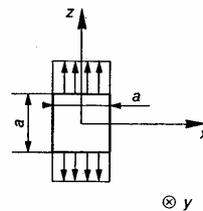


Fig. 60

Le vecteur vitesse relative $V_0\vec{x}$ du vent par rapport au navire est de 40 km/h et il est perpendiculaire au navire.

La force propulsive qui entraîne le navire est due à l'effet Magnus : lorsqu'on place dans un courant d'air un cylindre animé d'un mouvement de rotation autour de son axe, le cylindre met en mouvement par viscosité



les filets fluides qui le contournent, et qui engendrent alors une action mécanique sur le cylindre, représentée par une force perpendiculaire à la direction du courant d'air dont le sens dépend du sens de rotation du cylindre. (Cet effet Magnus explique aussi la courbure que présente la trajectoire d'une balle de tennis coupée.)

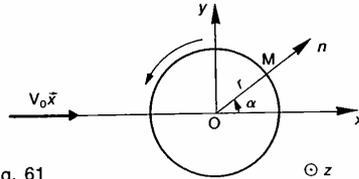


Fig. 61

On montre en aérodynamique que dans un tel écoulement la répartition des pressions sur le cylindre est :

$$\vec{p}(M) = -\frac{1}{2} \rho V_0^2 \left[1 - \left(\frac{\omega r}{V_0} - 2 \sin \alpha \right)^2 \right] \vec{n}$$

avec :

- ρ : masse volumique de l'air.
- V_0 : vitesse du vent suivant (O, \vec{x}) .
- ω : vitesse de rotation du cylindre autour de l'axe (O, \vec{z}) .
- r : rayon du cylindre.
- \vec{n} : vecteur unitaire normal à la surface latérale du cylindre, orienté vers l'extérieur du cylindre.
- $\alpha = (\vec{x}, \vec{n})$.

V_0 et ω sont algébriques.

On donne : $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$.

QUESTIONS

1° Montrer que la résultante générale des pressions aérodynamiques est par unité de longueur du cylindre :

$$\vec{F} = -2\pi\rho V_0\omega r^2 \vec{y}$$

2° En déduire la forme propulsive théorique qui entraîne le navire.

9 — Un flotteur de carburateur correspondant à la coupe partielle de la figure 62 a peut être assimilé à un tronc de cône de révolution dont les caractéristiques sont données dans la figure 62 b.

En chaque point M de la surface immergée du flotteur, l'essence exerce une action mécanique définie par la densité surfacique :

$$\vec{f}_M = -\rho g(h-z) \vec{n}$$

avec :

- ρ : masse volumique de l'essence.
- g : accélération de la pesanteur.
- \vec{n} : vecteur unitaire normal au point M à la surface du flotteur, dirigé vers l'extérieur du flotteur
- z : abscisse du point M sur l'axe (O, \vec{z}) .

Pour lester le flotteur il est nécessaire de connaître l'action mécanique de l'essence sur le flotteur.

QUESTIONS

1° Montrer que le torseur d'action mécanique des forces de pression exercées par l'essence sur le flotteur s'écrit au point O :

$$\{\mathcal{C}(\text{essence} \rightarrow \text{flotteur})\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_O$$

avec : $\vec{R} = \pi\rho gh \left[r^2 + h \operatorname{tg} \alpha \left(r + \frac{h}{3} \operatorname{tg} \alpha \right) \right]$.

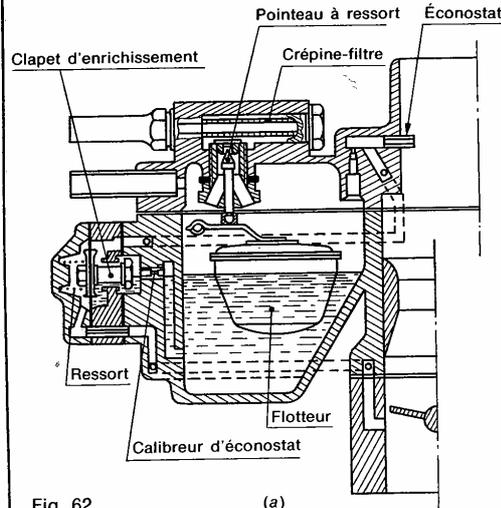


Fig. 62

2° Vérifier ce résultat en appliquant le principe d'Archimède.

10 — Calcul de l'étendue de la surface de contact et de la pression maximum de contact entre deux corps par les relations de Hertz dans les deux cas particuliers suivants :

- a) contact linéique cylindre sur cylindre,
- b) contact ponctuel sphère sur sphère.

Lorsque l'un des rayons est infini, le contact est celui d'un cylindre ou d'une sphère sur un plan.

Les relations de Hertz que nous allons donner sont valables dans le domaine élastique pour un coefficient de Poisson de $\frac{3}{10}$.

Pour ce calcul, il faut définir :

1° La courbure relative entre les surfaces en contact :

$$\frac{1}{r_r} = \frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2}$$

avec :

- r_r : rayon de courbure relative.
- r_1 : rayon du cylindre ou de la sphère (1),
- r_2 : rayon du cylindre ou de la sphère (2),
- signe + pour tangence extérieure,
- signe - pour tangence intérieure.

2° Le module d'élasticité de calcul E :

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)$$

- E_1 module d'élasticité du matériau de (1).
- E_2 module d'élasticité du matériau de (2).

Premier cas : Contact cylindre sur cylindre (figure 63)

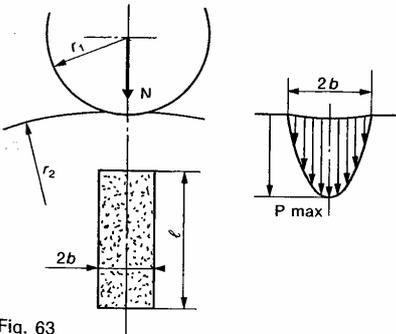


Fig. 63

demi-largeur de contact :

$$b = 1,52 \sqrt{\frac{N \cdot r_r}{E \cdot l}}$$

pression spécifique maximale :

$$P_{\max} = 0,418 \sqrt{\frac{N \cdot E}{r_r \cdot l}}$$

Deuxième cas : Contact sphère sur sphère (figure 64)

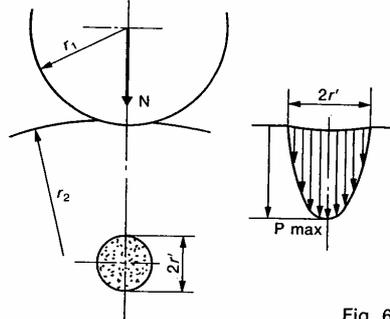


Fig. 64

rayon du cercle de contact :

$$r' = 1,11 \sqrt{\frac{N \cdot r_r}{E}}$$

pression spécifique maximale :

$$P_{\max} = 0,388 \sqrt{N \left(\frac{E}{r_r} \right)^2}$$

QUESTIONS

1° Deux roues de friction cylindriques d'axes parallèles, de rayon $r_1 = 3$ cm et $r_2 = 8$ cm, sont en contact sur une largeur $l = 1,5$ cm. Sachant que :

$$\begin{cases} P_{\max} = 3 \text{ MPa} \\ E_1 = 200\,000 \text{ MPa} \\ E_2 = 210\,000 \text{ MPa} \end{cases}$$

Déterminer :

a) L'effort presseur maximum N que l'on peut exercer entre ces roues.

b) La largeur $2b$ de la bande de contact.

2° Une sphère de rayon $r = 3$ cm, de poids $P = 7$ N repose sur un plan horizontal.

Sachant que le plan et la sphère ont même module d'Young : $E = 200\,000$ MPa, déterminer le rayon r' du cercle de contact entre la sphère et le plan, ainsi que la pression spécifique maximum.

2 principe fondamental de la statique

Le but de ce chapitre est en particulier la détermination des torseurs d'action mécanique s'exerçant sur un ensemble matériel (E), lorsque (E) est en équilibre par rapport à un repère galiléen. Pour cela, il est nécessaire de formuler le principe fondamental de la statique après avoir défini au préalable la notion d'équilibre d'un ensemble matériel par rapport à un repère.

1. ÉQUILIBRE D'UN ENSEMBLE MATÉRIEL PAR RAPPORT À UN REPÈRE

Soit un ensemble matériel (E) quelconque. (E) peut être un solide, un ensemble de solides liés ou non, une certaine masse de liquide ou de gaz, etc.

Définition

On dira que l'ensemble matériel (E) est en équilibre par rapport à un repère R si, au cours du temps, chaque point de (E) conserve une position fixe par rapport au repère R.

Cas particulier du solide

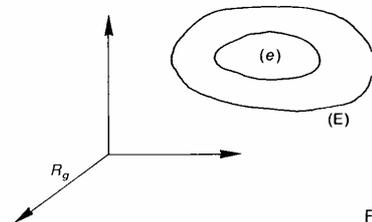
Un solide (S) est en équilibre par rapport à un repère R si les paramètres qui définissent sa position dans R sont constants au cours du temps.

2. PRINCIPE FONDAMENTAL

2.1. ÉNONCÉ

Il existe au moins un repère, appelé repère galiléen, tel que pour tout sous-ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à ce repère, le torseur associé aux actions mécaniques extérieures à (e) soit nul.

Notons R_g le repère galiléen et \bar{e} l'extérieur de e. Le principe fondamental de la statique formule



l'existence d'au moins un repère R_g tel que puisse écrire :

$$\{\mathcal{T}(\bar{e} \rightarrow e)\} = \{\mathbf{0}\} \quad \forall (e) \subset (E)$$

2.2. REPÈRE GALILÉEN

Pour la plupart des mécanismes étudiés en laboratoire, un repère lié à la terre constitue une très bonne approximation d'un repère galiléen. Un repère galiléen est donc un repère dans lequel on peut vérifier le principe fondamental de la statique avec une bonne précision.

2.3. THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA STATIQUE

En écrivant qu'en tout point de l'espace la résultante générale et le moment résultant du torseur associé aux actions mécaniques extérieures au sous-ensemble matériel (e) sont nuls, on obtient deux théorèmes appelés théorèmes généraux de la statique.

Principe fondamental de la statique

$$\mathcal{C}(\bar{e} \rightarrow e) = \begin{Bmatrix} \bar{R}(\bar{e} \rightarrow e) \\ \bar{M}_A(\bar{e} \rightarrow e) \end{Bmatrix}$$

en un point A quelconque.

Théorème de la résultante statique

Pour tout sous-ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) en équilibre par rapport au repère galiléen R_g , la résultante générale du torseur associé aux actions mécaniques extérieures (e) est nulle.

Soit
$$\bar{R}(\bar{e} \rightarrow e) = \bar{0}.$$

Théorème du moment statique

Pour tout sous-ensemble matériel (e) de l'ensemble matériel (E) en équilibre par rapport au repère galiléen R_g , le moment résultant du torseur associé aux actions mécaniques extérieures (e) est nul en tout point.

Soit
$$\bar{M}_A(\bar{e} \rightarrow e) = \bar{0} \quad \forall A$$

2.4. REMARQUE IMPORTANTE

Si le torseur $\{\mathcal{C}(\bar{e} \rightarrow e)\}$ est nul, (e) n'est pas nécessairement en équilibre par rapport au repère galiléen, même si (e) est un solide. En effet, considérons les deux exemples suivants :

EXEMPLE 1

Une paire de ciseaux (e) est soumise à l'action mécanique de deux doigts (d_1) et (d_2) représentée par les deux vecteurs liés opposés (A, \bar{F}) et ($B, -\bar{F}$) (figure 2a). L'action de la pesanteur est négligée.

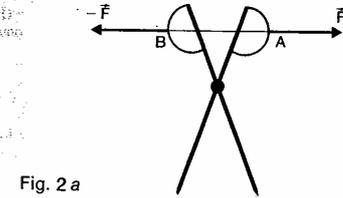


Fig. 2 a

Appliquons le principe fondamental de la statique à la paire de ciseaux (e), sans se soucier de savoir si elle est en équilibre par rapport à un repère galiléen. (\bar{e}), l'extérieur de (e), est uniquement constitué par les deux doigts (d_1) et (d_2) si on néglige l'action mécanique de la pesanteur :

$$(\bar{e}) = \{d_1, d_2\}.$$

Le torseur d'action mécanique de (d_1) sur (e) s'écrit au point A :

$$\{\mathcal{C}(d_1 \rightarrow e)\} = \begin{Bmatrix} \bar{F} \\ \bar{0} \end{Bmatrix}$$

Le torseur d'action mécanique de (d_2) sur (e) s'écrit au point B :

$$\{\mathcal{C}(d_2 \rightarrow e)\} = \begin{Bmatrix} -\bar{F} \\ \bar{0} \end{Bmatrix}$$

Le torseur associé à ces deux actions mécaniques, c'est-à-dire le torseur $\{\mathcal{C}(\bar{e} \rightarrow e)\}$ est égal à :

$$\{\mathcal{C}(\bar{e} \rightarrow e)\} = \begin{Bmatrix} \bar{F} \\ \bar{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\bar{F} \\ \bar{0} \end{Bmatrix}$$

Pour ajouter ces deux torseurs, exprimons-les au même point A. Le moment résultant en A du deuxième torseur est nul, car \bar{F} et $\bar{A}B$ ont même direction.

Alors :

$$\{\mathcal{C}(\bar{e} \rightarrow e)\} = \begin{Bmatrix} \bar{F} \\ \bar{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\bar{F} \\ \bar{0} \end{Bmatrix}$$

d'où

$$\{\mathcal{C}(\bar{e} \rightarrow e)\} = \{\bar{0}\}.$$

Ce torseur est bien nul, mais la paire de ciseaux s'ouvre...

La condition $\{\mathcal{C}(\bar{e} \rightarrow e)\} = \{\bar{0}\}$ n'est donc pas une condition suffisante d'équilibre par rapport au repère galiléen.

EXEMPLE 2

Soit $R_g(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un repère galiléen lié à un bâti (S_0) et un arbre (S) ayant avec (S_0) une liaison pivot d'axe (O, \bar{x}).

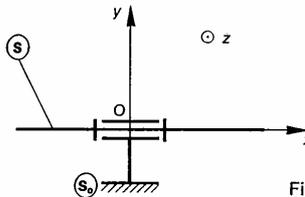


Fig. 2 b

Supposons cet arbre (S) en mouvement de rotation uniforme par rapport au bâti (S_0) et dynamiquement équilibré par rapport à l'axe de rotation (O, \bar{x}). (Nous verrons en dynamique, au chapitre 2, qu'un arbre est dynamiquement équilibré lorsque son centre d'inertie est sur l'axe de rotation et que cet axe de rotation est axe principal d'inertie pour l'arbre.)

Pour ce mouvement, on montre, en dynamique, que le torseur associé aux actions mécaniques extérieures à l'arbre est nul. Et pourtant, il tourne...

3. THÉOREME DES ACTIONS MUTUELLES

Soit (E) un ensemble matériel en équilibre par rapport à un repère galiléen R_g . Soit une partition de (E) en deux sous-ensembles matériels (e_1) et (e_2) (figure 3).

Appliquons le principe fondamental de la statique à (e_1) :

$$\{\mathcal{C}(\bar{e}_1 \rightarrow e_1)\} = \{\bar{0}\}.$$

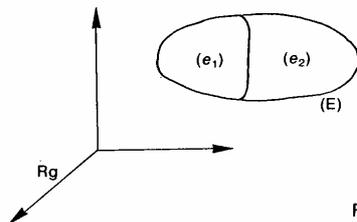


Fig. 3

(\bar{e}_1) , l'extérieur de (e_1) , est constitué par l'extérieur de (E) et (e_2) .

$$(\bar{e}_1) = \{\bar{E}, e_2\}.$$

Alors :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow e_1)\} + \{\mathcal{T}(e_2 \rightarrow e_1)\} = \{\bar{0}\}. \quad (1)$$

Appliquons le principe fondamentale de la statique à (e_2) :

$$\{\mathcal{T}(\bar{e}_2 \rightarrow e_2)\} = \{\bar{0}\}.$$

(\bar{e}_2) , l'extérieur de (e_2) , est constitué par l'extérieur de (E) et (e_1) .

$$(\bar{e}_2) = \{\bar{E}, e_1\}.$$

Alors :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow e_2)\} + \{\mathcal{T}(e_1 \rightarrow e_2)\} = \{\bar{0}\}. \quad (2)$$

Ajoutons membre à membre les relations (1) et (2) :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow e_1)\} + \{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow e_2)\} + \{\mathcal{T}(e_2 \rightarrow e_1)\} + \{\mathcal{T}(e_1 \rightarrow e_2)\} = \{\bar{0}\}. \quad (3)$$

Les deux premiers torseurs représentent l'action mécanique de l'extérieur de (E) sur (e_1) et (e_2) , c'est-à-dire sur (E) .

Par conséquent :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow e_1)\} + \{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow e_2)\} = \{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\}$$

(3) s'écrit alors :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\} + \{\mathcal{T}(e_2 \rightarrow e_1)\} + \{\mathcal{T}(e_1 \rightarrow e_2)\} = \{\bar{0}\}. \quad (4)$$

Or, l'application du principe fondamentale de la statique à (E) permet d'écrire que :

$$\{\mathcal{T}(\bar{E} \rightarrow E)\} = \{\bar{0}\}.$$

Par suite la relation (4) devient :

$$\{\mathcal{T}(e_2 \rightarrow e_1)\} = -\{\mathcal{T}(e_1 \rightarrow e_2)\}$$

d'où le théorème ci-dessous :

Théorème

L'action mécanique du sous-ensemble matériel (e_2) sur le sous-ensemble matériel (e_1) est opposée à l'action mécanique de (e_1) sur (e_2) .

4. APPLICATION : SYSTÈME VIS-ÉCROU

Considérons un système vis-écrou d'axe (O, \bar{x}) (figure 4).

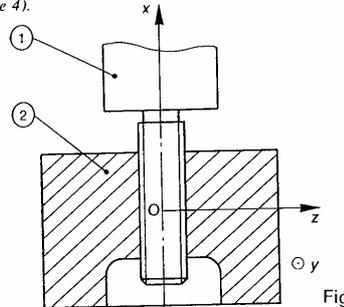


Fig.

Le repère galiléen $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ est lié à la vis (1). L'écrou (2) s'exerce l'action mécanique d'un corps représentée par le torseur :

$$\{\mathcal{T}(E \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} \bar{F} \\ \bar{C} \end{Bmatrix}$$

avec

$$\bar{F} = -F\bar{x} \quad (F > 0)$$

$$\bar{C} = C\bar{x}$$

Les surfaces de liaison entre la vis (1) et l'écrou sont des surfaces hélicoïdales d'axe (O, \bar{x}) , de section droite triangulaire de demi-angle au sommet β .

Au cours du mouvement de l'écrou (2) par rapport à la vis (1), un point de contact M, lié à l'écrou, se trouve dans R une hélice circulaire à droite (H), d'axe (O, \bar{x}) , de rayon r , d'inclinaison α (figure 5).

Soit K la projection orthogonale du point M sur le plan (O, \bar{y}, \bar{z}) . Notons \bar{i} le vecteur unitaire de même direction et de même sens que le vecteur \bar{OK} et troisième vecteur unitaire de la base orthonormée directe $(\bar{x}, \bar{i}, \bar{j})$.

Posons :

$$\theta = (\bar{y}, \bar{i}).$$

Soit \bar{u} le vecteur unitaire tangent en M à l'hélice et \bar{v} le troisième vecteur unitaire de la base orthomée directe $(\bar{i}, \bar{u}, \bar{v})$.

Alors

$$(\bar{i}, \bar{u}) = (\bar{x}, \bar{v}) = \alpha.$$

Le profil de la section droite du filet triangulaire se trouve dans le plan (M, \bar{v}, \bar{i}) .

Soit \bar{n} le vecteur unitaire normal au point M au de la vis, dirigé vers l'extérieur de la matière. Le vecteur est perpendiculaire à \bar{u} , et :

$$(\bar{v}, \bar{n}) = \beta.$$

Notons $\bar{\lambda}$ le troisième vecteur unitaire de la base orthonormée directe $(\bar{u}, \bar{n}, \bar{\lambda})$.

Soient f le coefficient de frottement entre les surfaces en contact (supposé le même en tout point) et φ l'angle de frottement ($f = \text{tg } \varphi$). Soit $\bar{f}_M(1 \rightarrow 2)$, la densité surfacique au point M de l'action de contact de (1) sur (2). Posons :

$$\bar{f}_M(1 \rightarrow 2) = p\bar{n} + t\bar{u} + t'\bar{\lambda}.$$

Dans l'étude, on supposera que l'écrou est à l'état de glissement par rapport à la vis, où que l'écrou est dynamiquement équilibré par rapport à l'axe (O, \bar{x}) (paragraphe 2.4), est animé d'un mouvement uni-

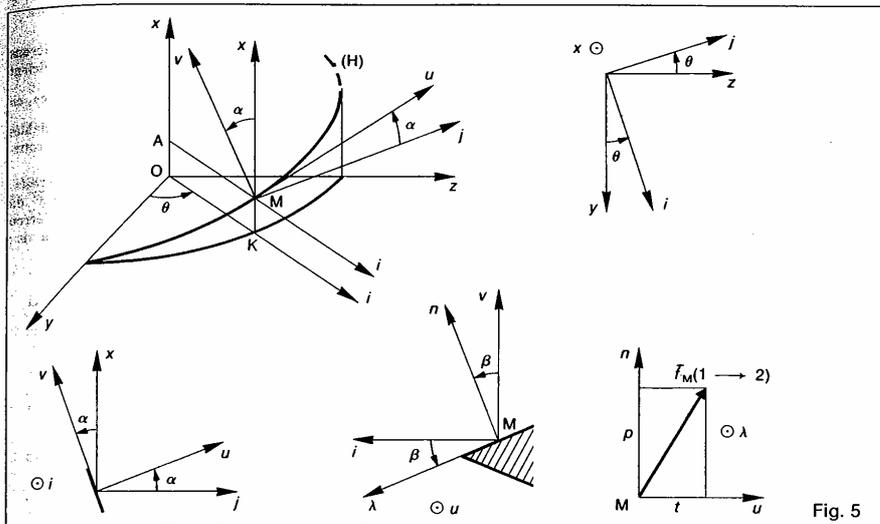


Fig. 5

par rapport à la vis. Dans cette hypothèse le vecteur vitesse de glissement au point M de (2) par rapport à (1) a pour direction \vec{u} , et les lois de Coulomb nous indiquent que $t'=0$.

Alors $\vec{f}_M(1 \rightarrow 2) = p\vec{n} + t\vec{u}$.

Le but de l'étude est de déterminer pour ce mécanisme :

- La condition d'irréversibilité, c'est-à-dire l'impossibilité, lorsque C est nul, d'obtenir un mouvement relatif de l'écrou par rapport à la vis, quelle que soit la valeur de F.
- La pression de contact entre les surfaces de liaison.
- La valeur du moment résultant \vec{C} pour faire tourner l'écrou dans un sens ou dans l'autre.
- Son efficacité en fonction du sens de rotation.

QUESTION 1

On suppose que $C=0$ et $F \neq 0$. Quelle relation doit-il y avoir entre f , α et β pour que l'écrou reste en équilibre par rapport à la vis?

RÉPONSE

Appliquons à l'écrou (2) le principe fondamental de la statique

$$\{\mathcal{C}(\vec{z} \rightarrow 2)\} = \{\vec{0}\}$$

(\vec{z}), l'extérieur de (2), est constitué par la vis (1) et (E). Par conséquent le principe fondamental s'écrit :

$$\{\mathcal{C}(1 \rightarrow 2)\} + \{\mathcal{C}(E \rightarrow 2)\} = \{\vec{0}\}$$

soit
$$\left\{ \begin{matrix} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}_O(1 \rightarrow 2) \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \vec{F} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\} = \{\vec{0}\}$$

avec
$$\vec{R}(1 \rightarrow 2) = \int_{MES} \vec{f}_M(1 \rightarrow 2) ds \quad (5)$$

$$\vec{M}_O(1 \rightarrow 2) = \int_{MES} \vec{OM} \wedge \vec{f}_M(1 \rightarrow 2) ds \quad (6)$$

(S) étant la surface de liaison entre (1) et (2).

Le théorème de la résultante statique appliqué à (2) s'écrit :

$$\vec{R}(1 \rightarrow 2) + \vec{F} = \vec{0} \quad (7)$$

le théorème du moment statique, au point O, appliqué à (2) s'écrit :

$$\vec{M}_O(1 \rightarrow 2) = \vec{0}.$$

Pour obtenir la relation cherchée projetons sur \vec{x} cette dernière équation vectorielle

$$\vec{x} \cdot \vec{M}_O(1 \rightarrow 2) = 0$$

soit avec (6) :

$$\vec{x} \cdot \int_{MES} \vec{OM} \wedge \vec{f}_M(1 \rightarrow 2) ds = 0$$

ou en introduisant \vec{x} sous le signe somme et en permutant les produits scalaire et vectoriel :

$$\int_{MES} (\vec{x} \wedge \vec{OM}) \cdot \vec{f}_M(1 \rightarrow 2) ds = 0$$

or

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \vec{OK} + \vec{KM} \\ \vec{OM} &= r\vec{i} + p\theta\vec{x} \end{aligned}$$

(p : pas réduit de l'hélice (H))

et
$$\begin{aligned} \vec{x} \wedge \vec{OM} &= \vec{x} \wedge (r\vec{i} + p\theta\vec{x}) \\ \vec{x} \wedge \vec{OM} &= r\vec{j} \end{aligned}$$

par suite la relation s'écrit :

$$\int_{MES} r\vec{j} \cdot \vec{f}_M(1 \rightarrow 2) ds = 0.$$

Cette intégrale est nulle si en tout point M :

$$\vec{j} \cdot \vec{f}_M(1 \rightarrow 2) = 0.$$

En considérant que l'écrou est à la limite du glissement par rapport à la vis :

$$\vec{f}_M(1 \rightarrow 2) = p\vec{n} + t\vec{u}$$

et

$$|t| = f|p|.$$

Compte tenu du sens de \vec{F} , p et t sont positifs, car la rotation de l'écrou par rapport à la vis se fera dans le sens négatif autour de (O, \vec{x}) ; alors

$$t = fp.$$

Par suite la relation à vérifier est :

$$\vec{f} \cdot (p\vec{n} + f\vec{u}) = 0$$

soit

$$\vec{f} \cdot (\sin \beta \vec{i} + \cos \beta \vec{v}) + f\vec{f} \cdot \vec{u} = 0$$

$$-\sin \alpha \cos \beta + f \cos \alpha = 0$$

ou

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f}{\cos \beta}.$$

Par suite, on admet que la condition d'irréversibilité du système vis-écrou est :

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \frac{f}{\cos \beta} \quad (8)$$

lorsque la vis est à filet carré ($\beta=0$) la condition devient :

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f.$$

Condition plus restrictive sur l'angle α que dans le cas général. C'est pourquoi, inversement, on utilise les vis à filet carré pour les transmissions de mouvement.

QUESTION 2

Déterminer la pression de contact p , supposée uniforme, entre les surfaces de liaison, en fonction de F .

RÉPONSE

La pression de contact p sera obtenue en projetant l'équation vectorielle (7) sur \vec{x} .

$$\vec{x} \cdot \vec{R}(1 \rightarrow 2) + \vec{x} \cdot \vec{F} = 0$$

soit
$$\vec{x} \cdot \int_{M \in S} \vec{f}_M(1 \rightarrow 2) ds = F$$

En considérant toujours que l'écrou est à la limite du glissement par rapport à la vis :

$$\vec{f}_M(1 \rightarrow 2) = p(\vec{n} + f\vec{u})$$

et la relation précédente s'écrit :

$$\vec{x} \cdot \int_{M \in S} p(\vec{n} + f\vec{u}) ds = F$$

en remarquant que :

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{x} \cdot (\sin \beta \vec{i} + \cos \beta \vec{v})$$

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \cos \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\vec{x} \cdot \vec{u} = \sin \alpha.$$

et que p , α , β sont indépendants du point M , on obtient :

$$p(\cos \beta \cos \alpha + f \sin \alpha) \int_{M \in S} ds = F$$

posons :
$$S = \int_{M \in S} ds$$

(aire de la surface de liaison).

Par conséquent, la relation donnant la pression de contact est :

$$p = \frac{F}{S(\cos \beta \cdot \cos \alpha + f \sin \alpha)}$$

QUESTION 3

Pour simplifier la suite de l'étude, nous considérons maintenant que la vis est à filet carré avec un coefficient

de frottement fictif $f' = \frac{f}{\cos \beta}$ entre les surfaces contact, pour que les résultats trouvés soient valables pour un filet triangulaire avec un coefficient de frottement f (on posera également $f' = \operatorname{tg} \varphi'$).

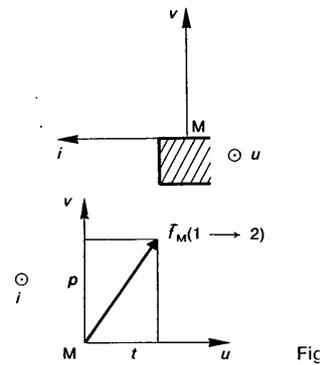
Lorsque la relation d'irréversibilité (8) est vérifiée déterminer la composante du moment résultant \vec{C} torseur d'action mécanique de (E) qui entraîne l'écrou

- a) dans le sens positif autour de (O, \vec{x}) ;
- b) dans le sens négatif autour de (O, \vec{x}) .

RÉPONSE

a) Dans le cas d'un filet carré (figure 6)

$$\vec{f}_M(1 \rightarrow 2) = p\vec{v} + t\vec{u}.$$



Appliquons à l'écrou (2) le théorème du moment statique au point O en projection sur \vec{x} :

$$\vec{x} \cdot \vec{M}_O(1 \rightarrow 2) + \vec{x} \cdot \vec{C} = 0.$$

Notons C_1 ($C_1 > 0$) la composante sur \vec{x} du moment résultant \vec{C} , alors

$$C_1 = -\vec{x} \cdot \vec{M}_O(1 \rightarrow 2)$$

avec (6) :

$$C_1 = -\vec{x} \cdot \int_{M \in S} \vec{OM} \wedge \vec{f}_M(1 \rightarrow 2) ds$$

ou en introduisant \vec{x} sous le signe somme et permutant les produits scalaire et vectoriel :

$$C_1 = -\int_{M \in S} (\vec{x} \wedge \vec{OM}) \cdot \vec{f}_M(1 \rightarrow 2) ds$$

nous avons démontré que : $\vec{x} \wedge \vec{OM} = r\vec{j}$ alors :

$$C_1 = -\int_{M \in S} r\vec{j} \cdot \vec{f}_M(1 \rightarrow 2) ds.$$

De plus, $\vec{f}_M(1 \rightarrow 2) = p\vec{v} + t\vec{u}$, avec

$$\begin{cases} p > 0 & (\text{car } F > 0) \\ t < 0 & (\text{car } C_1 > 0) \end{cases}$$

par conséquent, l'égalité $|t| = f'|p|$ s'écrit :

$$-t = f'p$$

d'où $\vec{f}_M(1 \rightarrow 2) = p(\vec{v} - f'\vec{u})$

et
$$C_1 = -\int_{M \in S} rp\vec{j} \cdot (\vec{v} - f'\vec{u}) ds$$

Principe fondamental de la statique

On remarquant que :

$$\begin{cases} \vec{f} \cdot \vec{v} = -\sin \alpha \\ \vec{f} \cdot \vec{u} = \cos \alpha \end{cases}$$

et que f' et α sont indépendants du point M, l'expression de C_1 s'écrit :

$$C_1 = (\sin \alpha + f' \cos \alpha) \int_{M \in S} r p \, ds.$$

Considérons que tous les points M sont à une même distance r_{moy} de l'axe (O, \vec{x}) , alors :

$$\int_{M \in S} r p \, ds = r_{\text{moy}} \int_{M \in S} p \, ds.$$

La valeur de l'intégrale $\int_{M \in S} p \, ds$ est donnée en appliquant à l'écrou (2) le théorème de la résultante statique en projection sur \vec{x} :

$$\vec{x} \cdot \vec{R} (1 \rightarrow 2) + \vec{x} \cdot \vec{F} = 0$$

soit $\vec{x} \cdot \int_{M \in S} f_M (1 \rightarrow 2) \, ds = F$

ou $\vec{x} \cdot \int_{M \in S} p (\vec{v} - f' \vec{u}) \, ds = F$

comme $\vec{x} \cdot \vec{v} = \cos \alpha$
 $\vec{x} \cdot \vec{u} = \sin \alpha$

on obtient :

$$(\cos \alpha - f' \sin \alpha) \int_{M \in S} p \, ds = F.$$

Par suite C_1 a pour expression :

$$C_1 = Fr_{\text{moy}} \frac{\sin \alpha + f' \cos \alpha}{\cos \alpha - f' \sin \alpha}$$

ou encore

$$C_1 = Fr_{\text{moy}} \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \varphi'}{1 - \text{tg } \varphi' \text{tg } \alpha}$$

soit

$$C_1 = Fr_{\text{moy}} \text{tg } (\alpha + \varphi').$$

REMARQUE

Pour ce calcul il n'a pas été nécessaire de supposer la pression de contact p uniforme.

b) Dans ce cas, notons C_2 ($C_2 < 0$) la composante sur \vec{x} du moment résultant \vec{C} .

Par un raisonnement analogue au précédent on montre que :

$$C_2 = -Fr_{\text{moy}} \text{tg } (\varphi' - \alpha)$$

si la relation (8) est vérifiée $\varphi' \geq \alpha$, par conséquent C_2 est bien négatif.

QUESTION 4

Lorsque (E) fait tourner l'écrou (2) d'un tour, le travail du moment résultant \vec{C} est (voir cours de Mécanique 1^{re} F) :

$$W(\vec{C}) = C \cdot 2\pi.$$

$C = C_1$ lorsque (E) fait tourner l'écrou dans le sens positif, et $C = C_2$ dans le cas contraire.

Le travail de la résultante générale \vec{F} est :

$$W(\vec{F}) = -F \times 2\pi p,$$

avec :

$$p = r_{\text{moy}} \text{tg } \alpha \quad (\text{pas réduit de la vis}).$$

On définit l'efficacité d'un tel mécanisme par le rapport :

$$\eta = \frac{|W(\vec{F})|}{|W(\vec{C})|}$$

Déterminer dans les deux cas de la question précédente l'efficacité du système vis-écrou.

RÉPONSE

a) $C = C_1$

Dans ce cas et pour un tour :

$$W(\vec{C}_1) = 2\pi Fr_{\text{moy}} \text{tg } (\alpha + \varphi')$$

$$W(\vec{F}) = -F 2\pi r_{\text{moy}} \text{tg } \alpha.$$

Par conséquent :

$$\eta = \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } (\alpha + \varphi')}$$

Dans le cas d'un système vis-écrou irréversible ($\varphi' \geq \alpha$) l'efficacité est inférieure à 0,5.

b) $C = C_2$

Dans ce cas et pour un tour :

$$W(\vec{C}_2) = -2\pi Fr_{\text{moy}} \text{tg } (\varphi' - \alpha)$$

$$W(\vec{F}) = -F 2\pi r_{\text{moy}} \text{tg } \alpha.$$

Par suite :

$$\eta = \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } (\varphi' - \alpha)}$$

si $\varphi' < 2\alpha$, alors $\eta > 1$.

À SAVOIR

1- Le principe fondamental de la statique existe au moins dans un repère galiléen tel que, pour tout sous-ensemble matériel (E) de l'ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à ce repère, le torseur associé aux actions mécaniques extérieures $\mathcal{C}(E)$ soit nul.

2- Soit $\mathcal{C}(E)$ tel que $\mathcal{C}(E)$ en équilibre par rapport à un repère galiléen sous l'action mécanique de deux forces ou de trois forces (cours de Première).

2- Le théorème de actions mutuelles

$$\mathcal{C}(E_1 \rightarrow E_2) = -\mathcal{C}(E_2 \rightarrow E_1)$$

3- Les conditions d'équilibre d'un ensemble matériel par rapport à un repère galiléen sous l'action mécanique de deux forces ou de trois forces (cours de Première).

PROBLÈME RÉSOLU

Pour déplacer suivant un axe (O, \vec{x}) un meuble en bois (3) de masse M , de centre de gravité G , sur un sol en béton (0) on intercale entre le meuble et le sol deux barres cylindriques de révolution (1) et (2) identiques, en acier, homogènes, de rayon r , de masse m , d'axe parallèle à (O, \vec{z}) (figure 7).

Le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est lié au sol. Soit $\vec{g} = -g\vec{y}$ l'accélération de la pesanteur.

On suppose que les coefficients de frottement aux différents points de contact sont identiques, ainsi que les paramètres de résistance au roulement. Notons alors :

f : les coefficients de frottement

η : les paramètres de résistance au roulement.

Le but de l'étude est la détermination :

— de la force horizontale nécessaire au déplacement du meuble,

— de la position que doit avoir le meuble par rapport aux barres cylindriques, pour qu'il soit en contact et roule sans glisser sur celles-ci.

Définissons aux différents points de contact les torseurs d'action mécanique du sol et du meuble sur les barres :

$$\{\mathcal{C}(0 \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_1 \end{Bmatrix}_{A_1}$$

avec
$$\begin{cases} \vec{R}_1 = X_1\vec{x} + Y_1\vec{y} \\ \vec{M}_1 = M_1\vec{z} \end{cases}$$

$$\{\mathcal{C}(0 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_2 \end{Bmatrix}_{A_2}$$

avec
$$\begin{cases} \vec{R}_2 = X_2\vec{x} + Y_2\vec{y} \\ \vec{M}_2 = M_2\vec{z} \end{cases}$$

$$\{\mathcal{C}(3 \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_3 \\ \vec{M}_3 \end{Bmatrix}_{A_3}$$

avec
$$\begin{cases} \vec{R}_3 = X_3\vec{x} + Y_3\vec{y} \\ \vec{M}_3 = M_3\vec{z} \end{cases}$$

$$\{\mathcal{C}(3 \rightarrow 2)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_4 \\ \vec{M}_4 \end{Bmatrix}_{A_4}$$

avec
$$\begin{cases} \vec{R}_4 = X_4\vec{x} + Y_4\vec{y} \\ \vec{M}_4 = M_4\vec{z} \end{cases}$$

On déplace le meuble à une vitesse de translation constante $V\vec{x}$ ($V > 0$) en exerçant sur ce meuble une action mécanique représentée par la force (P, \vec{F}) telle que :

$$\vec{F} = F\vec{x} \quad \text{avec } F > 0$$

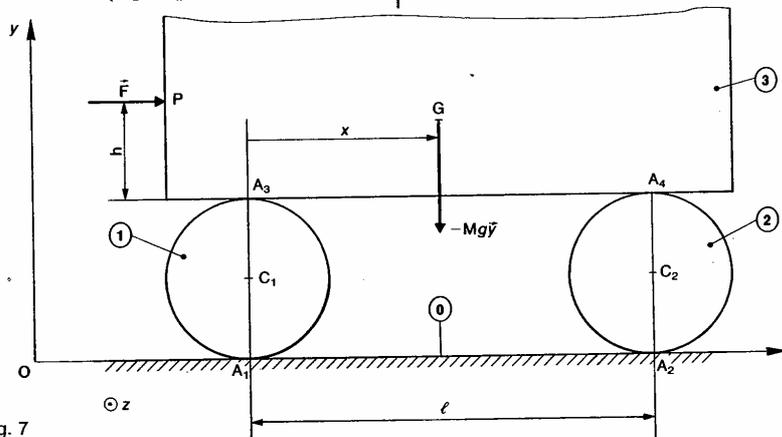
$$\vec{OP} \cdot \vec{y} = 2r + h \quad (h : \text{constante positive}).$$

Au cours de ce mouvement on suppose que les barres roulent sans glisser sur le sol et sur le meuble.

Dans un tel mouvement uniforme, on montre en dynamique (chapitre 2) que le principe fondamental de la statique est applicable à tout sous-ensemble matériel de l'ensemble matériel constitué par (1), (2) et (3).

Soit l la distance entre les axes des barres (1) et (2). Cette distance reste constante au cours du mouvement.

Soit x l'abscisse sur l'axe (O, \vec{x}) du centre de gravité G par rapport au centre C_1 de la barre (1). On suppose que $0 < x < l$.



REMARQUE

Les inconnues du problème sont les 12 composantes d'action de contact et F l'application du principe fondamental de la statique à (1) donnera trois équations scalaires, ainsi qu'à (2) et à (3).

Par conséquent on disposera au maximum de neuf équations scalaires indépendantes, qui ne suffiront pas à elles seules à déterminer les treize inconnues du problème.

Les équations supplémentaires seront obtenues en exprimant qu'en chaque point A_1, A_2, A_3, A_4 , il y a une relation entre le moment de roulement et l'effort normal de l'action mécanique de contact (voir chapitre 1 paragraphe 3.3).

QUESTION 1

Écrire les trois équations scalaires déduites du principe fondamental de la statique appliqué à la barre (1).

RÉPONSE

Le principe fondamental de la statique appliqué à (1) s'écrit :

$$\{\mathcal{C}(\bar{1} \rightarrow 1)\} = \{\bar{0}\}.$$

($\bar{1}$), l'extérieur de (1), est constitué par le sol (0), le meuble (3) et la pesanteur notée g .

Le principe fondamental s'écrit alors :

$$\{\mathcal{C}(0 \rightarrow 1)\} + \{\mathcal{C}(3 \rightarrow 1)\} + \{\mathcal{C}(g \rightarrow 1)\} = \{\bar{0}\}$$

soit :

$$\begin{Bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{M}_1 \end{Bmatrix}_{A_1} + \begin{Bmatrix} \bar{R}_3 \\ \bar{M}_3 \end{Bmatrix}_{A_3} + \begin{Bmatrix} -mg\bar{y} \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_C = \{\bar{0}\}.$$

Pour ajouter ces torseurs exprimons-les au même point A_1 :

$$\begin{Bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{M}_1 \end{Bmatrix}_{A_1} + \begin{Bmatrix} \bar{R}_3 \\ \bar{M}_3 + \bar{R}_3 \wedge \overline{A_3 A_1} \end{Bmatrix}_{A_1} + \begin{Bmatrix} -mg\bar{y} \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_{A_1} = \{\bar{0}\}$$

en ajoutant ces torseurs on met en évidence le torseur $\{\mathcal{C}(\bar{1} \rightarrow 1)\}$:

$$\begin{Bmatrix} \bar{R}_1 + \bar{R}_3 - mg\bar{y} \\ \bar{M}_1 + \bar{M}_3 + \bar{R}_3 \wedge \overline{A_3 A_1} \end{Bmatrix}_{A_1} = \{\bar{0}\}.$$

Le théorème de la résultante statique appliqué à (1) s'exprime par :

$$\bar{R}_1 + \bar{R}_3 - mg\bar{y} = \bar{0}. \quad (9)$$

Le théorème du moment statique, au point A_1 , appliqué à (1) s'exprime par :

$$\bar{M}_1 + \bar{M}_3 + \bar{R}_3 \wedge \overline{A_3 A_1} = \bar{0} \quad (10)$$

l'équation (9) donne en projection sur \bar{x} et \bar{y} les deux équations scalaires suivantes :

$$X_1 + X_3 = 0 \quad (11)$$

$$Y_1 + Y_3 - mg = 0 \quad (12)$$

l'équation (10) donne en projection sur \bar{z} l'équation scalaire :

$$M_2 + M_3 - 2rX_3 = 0. \quad (13)$$

QUESTION 2

Écrire les trois équations scalaires déduites du principe fondamental de la statique appliqué à la barre (2).

RÉPONSE

Le principe fondamental s'écrit :

$$\{\mathcal{C}(\bar{2} \rightarrow 2)\} = \{\bar{0}\}$$

soit

$$\{\mathcal{C}(0 \rightarrow 2)\} + \{\mathcal{C}(3 \rightarrow 2)\} + \{\mathcal{C}(g \rightarrow 2)\} = \{\bar{0}\}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{R}_2 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix}_{A_2} + \begin{Bmatrix} \bar{R}_4 \\ \bar{M}_4 \end{Bmatrix}_{A_4} + \begin{Bmatrix} -mg\bar{y} \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_C = \{\bar{0}\}.$$

En exprimant les torseurs au même point A_2 , on en déduit les deux équations vectorielles suivantes :

$$\begin{cases} \bar{R}_2 + \bar{R}_4 - mg\bar{y} = \bar{0} \\ \bar{M}_2 + \bar{M}_4 + \bar{R}_4 \wedge \overline{A_4 A_2} = \bar{0} \end{cases}$$

soit en projection sur ($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$)

$$X_2 + X_4 = 0 \quad (14)$$

$$Y_2 + Y_4 - mg = 0 \quad (15)$$

$$M_2 + M_4 - 2rX_4 = 0. \quad (16)$$

QUESTIONS 3

Écrire les trois équations scalaires déduites du principe fondamental de la statique appliqué au meuble (3).

RÉPONSE

Le principe fondamental s'écrit :

$$\{\mathcal{C}(\bar{3} \rightarrow 3)\} = \{\bar{0}\}$$

soit

$$\{\mathcal{C}(\bar{F} \rightarrow 3)\} + \{\mathcal{C}(1 \rightarrow 3)\} + \{\mathcal{C}(2 \rightarrow 3)\} + \{\mathcal{C}(g \rightarrow 3)\} = \{\bar{0}\}.$$

En tenant compte, du théorème des actions mutuelles, ces torseurs s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} \bar{F} \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_P + \begin{Bmatrix} -\bar{R}_3 \\ -\bar{M}_3 \end{Bmatrix}_{A_3} + \begin{Bmatrix} -\bar{R}_4 \\ -\bar{M}_4 \end{Bmatrix}_{A_4} + \begin{Bmatrix} -Mg\bar{y} \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_G = \{\bar{0}\}.$$

En exprimant les torseurs au même point A_4 on en déduit les deux équations vectorielles suivantes :

$$\begin{cases} \bar{F} - \bar{R}_3 - \bar{R}_4 - Mg\bar{y} = \bar{0} \\ \bar{F} \wedge \overline{PA_4} - \bar{M}_3 - \bar{R}_3 \wedge \overline{A_3 A_4} - \bar{M}_4 - Mg\bar{y} \wedge \overline{GA_4} = \bar{0} \end{cases}$$

soit en projection sur $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$F - X_3 - X_4 = 0 \quad (17)$$

$$-Y_3 - Y_4 - Mg = 0 \quad (18)$$

$$-Fh - M_3 + Y_3l - M_4 + Mg(l-x) = 0. \quad (19)$$

REMARQUE

Les équations numérotées de (11) à (19) expriment 9 relations entre les 13 inconnues $F, X_1, Y_1, M_1, X_2, \dots, M_4$. En répondant aux deux questions suivantes nous obtiendrons quatre équations supplémentaires pour déterminer toutes les inconnues du problème.

QUESTION 4

Déterminer les vecteurs rotation $\vec{\Omega}(1/0)$ et $\vec{\Omega}(1/3)$ en fonction de V et r .

RÉPONSE

Entre les vecteurs vitesse des points A_1 et A_3 , supposés liés à la barre (1), existe la relation :

$$\vec{V}(A_3 \in 1/0) = \vec{V}(A_1 \in 1/0) + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{A}_1\vec{A}_3$$

la barre (1) roule sans glisser sur le sol (0), par suite :

$$\vec{V}(A_1 \in 1/0) = \vec{0},$$

la barre (1) roule également sans glisser sur le meuble (3), alors :

$$\vec{V}(A_3 \in 1/0) = \vec{V}(A_3 \in 3/0)$$

$\vec{V}(A_3 \in 3/0)$ est le vecteur vitesse de translation de (3) par rapport à (0), soit $V\vec{x}$.

De plus, en remarquant que $\vec{A}_1\vec{A}_3 = 2r\vec{y}$, et que dans ce mouvement plan $\vec{\Omega}(1/0)$ est de la forme $\omega_{10}\vec{z}$ ($\omega_{10} < 0$ lorsque $V > 0$), la relation liant les vecteurs vitesse des points A_1 et A_3 s'écrit :

$$V\vec{x} = \omega_{10}\vec{z} \wedge 2r\vec{y}$$

soit $V\vec{x} = -2r\omega_{10}\vec{x}$

d'où $\omega_{10} = -\frac{V}{2r}$

et $\vec{\Omega}(1/0) = -\frac{V}{2r}\vec{z}$.

Appliquons entre (1), (3) et (0) la relation de composition des vecteurs rotation :

$$\vec{\Omega}(1/3) = \vec{\Omega}(1/0) - \vec{\Omega}(3/0)$$

comme (3) a un mouvement de translation par rapport à (0) : $\vec{\Omega}(3/0) = \vec{0}$, alors

$$\vec{\Omega}(1/3) = -\frac{V}{2r}\vec{z}.$$

QUESTION 5

Sachant qu'aux quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 il y a roulement sans glissement entre les solides en contact, transposer les résultats du cours formulés sur le contact ponctuel au chapitre 1, paragraphe 3.3, pour déterminer les relations que vérifient :

- a) X_1, Y_1 et M_1 ;
- b) X_2, Y_2 et M_2 ;
- c) X_3, Y_3 et M_3 ;
- d) X_4, Y_4 et M_4 .

RÉPONSE

a) La barre (1) roule sans glisser sur le sol (0), alors :

$$|X_1| \leq f|Y_1|.$$

En remarquant que $Y_1 > 0$, cette inéquation s'écrit :

$$|X_1| \leq fY_1.$$

Le moment de roulement $M_1\vec{z}$ est opposé au vecteur rotation de roulement $\vec{\Omega}(1/0) = -\frac{V}{2r}\vec{z}$.

Comme $-\frac{V}{2r} < 0, M_1 > 0$.

De plus, ce moment de roulement se calcule à partir de l'effort normal $Y_1\vec{y}$ par la relation :

$$\|M_1\vec{z}\| = \eta \|Y_1\vec{y}\|$$

avec $Y_1 > 0$ et $M_1 > 0$ on obtient

$$M_1 = \eta Y_1. \quad (20)$$

b) La barre (2) roule sans glisser sur le sol (0). En remarquant que $Y_2 > 0$ et $M_2 > 0$, on obtient :

$$|X_2| \leq fY_2$$

et $M_2 = \eta Y_2. \quad (21)$

c) Le meuble (3) roule sans glisser sur la barre (1). En remarquant que $Y_3 < 0$ et $M_3 > 0$ or obtient :

$$|X_3| \leq -fY_3$$

et $M_3 = -\eta Y_3. \quad (22)$

d) Le meuble (3) roule sans glisser sur la barre (2). En remarquant que $Y_4 < 0$ et $M_4 > 0$, or obtient :

$$|X_4| \leq -fY_4$$

et $M_4 = -\eta Y_4. \quad (23)$

QUESTION 6

Déterminer la force (P, \vec{F}) qui engendre le mouvement du meuble. Faire l'application numérique pour :

$$\begin{cases} M = 200 \text{ kg,} \\ m = 12 \text{ kg,} \\ r = 3 \text{ cm,} \\ \eta = 0,4 \text{ cm,} \\ g = 9,81 \text{ m/s}^2. \end{cases}$$

RÉPONSE

L'équation (17) peut s'écrire :

$$F = X_3 + X_4$$

d'après (13) :

$$X_3 = \frac{1}{2r} (M_1 + M_3)$$

et d'après (16) :

$$X_4 = \frac{1}{2r} (M_2 + M_4)$$

donc

$$F = \frac{1}{2r} (M_1 + M_2 + M_3 + M_4)$$

compte tenu des relations (20), (21), (22), (23), obtenues à la question 5 :

$$F = \frac{\eta}{2r} [Y_1 + Y_2 - (Y_3 + Y_4)].$$

Ajoutons membre à membre les relations (12) et (15), on obtient alors :

$$Y_1 + Y_2 = 2mg - (Y_3 + Y_4)$$

d'où

$$F = \frac{\eta}{r} [mg - (Y_3 + Y_4)]$$

L'équation (18) permet d'écrire que $-(Y_3 + Y_4) = Mg$.

Alors :
$$F = \frac{\eta}{r} (M + m)g.$$

Application numérique :

$$F = 27,7 \text{ daN.}$$

QUESTION 7

Déterminer les composantes des résultantes générales des torseurs d'action mécanique de contact : $X_1, Y_1, X_2, \dots, Y_4$.

RÉPONSE

En remplaçant M_3 par $-\eta Y_3$ et M_4 par $-\eta Y_4$ dans l'équation (19), cette équation donne avec l'équation (18) les valeurs de Y_3 et Y_4 .

$$\begin{cases} Y_3 + Y_4 = -Mg \\ (\eta + l)Y_3 + \eta Y_4 = Fh - Mg(l - x) \end{cases}$$

d'où

$$Y_3 = F \frac{h}{l} + Mg \left(\frac{x + \eta}{l} - 1 \right) \quad (24)$$

et

$$Y_4 = -F \frac{h}{l} - Mg \left(\frac{x + \eta}{l} \right) \quad (25)$$

(12) donne alors Y_1 :

$$Y_1 = -F \frac{h}{l} - \left[M \left(\frac{x + \eta}{l} - 1 \right) - m \right] g$$

et (15) donne Y_2 :

$$Y_2 = F \frac{h}{l} + \left[M \left(\frac{x + \eta}{l} \right) + m \right] g$$

X_3 s'exprime à partir de l'équation (13) :

$$X_3 = \frac{1}{2r} (M_1 + M_3)$$

soit

$$X_3 = \frac{\eta}{2r} (Y_1 - Y_3)$$

comme $X_1 = -X_3$, on obtient :

$$X_1 = -X_3 = \frac{\eta}{r} \left[F \frac{h}{l} + Mg \left(\frac{x + \eta}{l} - 1 \right) - \frac{mg}{2} \right] \quad (26)$$

X_4 s'exprime à partir de l'équation (16) :

$$X_4 = \frac{1}{2r} (M_2 + M_4)$$

soit

$$X_4 = \frac{\eta}{2r} (Y_2 - Y_4).$$

Comme $X_2 = -X_4$, on obtient :

$$X_2 = -X_4 = -\frac{\eta}{r} \left[F \frac{h}{l} + Mg \left(\frac{x + \eta}{l} \right) + \frac{mg}{2} \right]. \quad (27)$$

REMARQUE

On constate que pour $0 < x < l$:

$$X_2 < 0, X_4 > 0, Y_2 > 0 \text{ et } Y_4 < 0.$$

Si $Y_2 > 0$ et $Y_4 < 0$ la barre (2) est toujours en contact avec le sol et le meuble pour $0 < x < l$.

QUESTION 8

Quelle est la valeur maximale que peut prendre x pour que le meuble soit toujours en contact avec la barre (1), sachant que $h = 1 \text{ m}$ et $l = 1,5 \text{ m}$?

RÉPONSE

Le meuble est en contact avec la barre (1) si : $Y_3 < 0$ soit :

$$F \frac{h}{l} + Mg \left(\frac{x}{l} + \frac{\eta}{l} - 1 \right) < 0$$

d'où :
$$x < l - \eta - \frac{F}{Mg} h. \quad (28)$$

Application numérique :

$$x < 135,5 \text{ cm.}$$

QUESTION 9

Lorsque le meuble est en contact avec les deux barres et que le coefficient de frottement est $f = 0,5$, déterminer entre quelles valeurs peut varier x pour que l'hypothèse de roulement sans glissement des barres sur le sol et sur le meuble soit vérifiée.

RÉPONSE

Si la condition (28) est satisfaite, alors :

$$\begin{cases} X_1 < 0, & Y_1 > 0 \\ X_3 > 0, & Y_3 < 0. \end{cases}$$

Si un glissement doit se produire au niveau de la barre (1), il se produira au point A_3 et jamais au point A_1 , car :

$$\begin{cases} |X_1| = |X_3| \\ |Y_1| > |Y_3| \end{cases}$$

et ce qui veut dire que la résultante générale \vec{R}_1 ne pourra jamais venir sur le bord de son cône de frottement.

De la même façon, si un glissement doit se produire au niveau de la barre (2), il se produira au point A_4 et jamais au point A_2 .

Reste donc à comparer les conditions de non glissement aux points A_3 et A_4 .

Au point A_3 cette condition est :

$$|X_3| \leq f |Y_3|.$$

REMARQUE

Comme Y_3 peut devenir nul, sans que X_3 le devienne (voir relations (24), (26), (28)), il faudrait un coefficient de frottement infini pour empêcher le glissement au point A_3 lorsque x augmente.

Sachant que $X_3 > 0$ et $Y_3 < 0$ la relation précédente s'écrit :

$$X_3 \leq -f Y_3$$

avec (24) et (26) on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{\eta}{r} \left[F \frac{h}{l} + Mg \left(\frac{x}{l} + \frac{\eta}{l} - 1 \right) - \frac{mg}{2} \right] \\ \leq -f \left[F \frac{h}{l} + Mg \left(\frac{x}{l} + \frac{\eta}{l} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} x \frac{Mg}{l} \left(f - \frac{\eta}{r} \right) \\ \leq - \left[F \frac{h}{l} + Mg \left(\frac{\eta}{l} - 1 \right) \right] \left(f - \frac{\eta}{r} \right) - mg \frac{\eta}{2r}. \end{aligned}$$

Avec les valeurs numériques proposées :

$$f - \frac{\eta}{r} > 0,$$

par conséquent, la condition sur x s'écrit :

$$x \leq l - \eta - \frac{Fh}{Mg} - \frac{m}{2M} \cdot \frac{l}{\left(\frac{rf}{\eta} - 1 \right)}.$$

Application numérique : $x \leq 133,9 \text{ cm.}$

Au point A_4 la condition de non glissement est :

$$|X_4| \leq f |Y_4|$$

sachant que $X_4 > 0$ et $Y_4 < 0$, cette inéquation s'écrit :

$$X_4 \leq -f Y_4$$

avec (25) et (27) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{r} \left[F \frac{h}{l} + Mg \left(\frac{x}{l} + \frac{\eta}{l} \right) + \frac{mg}{2} \right] \\ \leq f \left[F \frac{h}{l} + Mg \left(\frac{x}{l} + \frac{\eta}{l} \right) \right] \end{aligned}$$

soit

$$x \frac{Mg}{l} \left[\frac{\eta}{r} - f \right] \leq - \left(F \frac{h}{l} + Mg \frac{\eta}{l} \right) \left(\frac{\eta}{r} - f \right) - mg \frac{\eta}{2r}$$

avec les valeurs numériques proposées :

$$\left(\frac{\eta}{r} - f \right) < 0,$$

par conséquent, la condition sur x s'écrit :

$$x \geq -\eta - \frac{F}{Mg} h + \frac{m}{2M} \cdot \frac{l}{\left(\frac{rf}{\eta} - 1 \right)}.$$

Application numérique :

On trouve que : $x \geq -12,9 \text{ cm.}$ Comme dans l'étude, on suppose que $x > 0$ cette condition est satisfaite.

Finalement, l'hypothèse de roulement sans glissement est vérifiée si $x \leq 133,9 \text{ cm.}$

CONSEILS POUR LA RÉSOLUTION

Pour déterminer les composantes inconnues des moments de réduction des torseurs d'action mécanique d'un mécanisme constitué de n pièces, on pose au maximum de $6n$ équations indépendantes dans le plan en appliquant le principe fondamental de la statique à n sous-ensembles de ce mécanisme.

En écrivant les lois de Coulomb ou les relations de contact ponctuel en supposant certaines pièces en contact à la limite du glissement, on obtient des relations supplémentaires pour déterminer les composantes inconnues. Il faut cependant toujours vérifier que cette hypothèse est compatible avec les équations déduites du principe fondamental.

3. C'est par analyse des torseurs d'action mécanique d'un mécanisme que l'on choisit, en fonction du problème posé :

- a) les sous-ensembles de pièces auxquels on appliquera le principe fondamental;
- b) le point où l'on écrira le théorème du moment statique;
- c) l'axe sur lequel on projettera les équations vectorielles obtenues en appliquant le théorème de la résultante statique ou le théorème du moment statique.

4. Attention aux erreurs de signe dans l'application du théorème des actions mutuelles.

5. Pour qu'un solide de masse non nulle, roule sans glisser sur un autre solide, il faut entre ces deux solides un coefficient de frottement non nul.

EXERCICES AVEC RÉPONSES

1 — La figure 8 représente la butée de fixation de sécurité LOOK 77 pour ski.

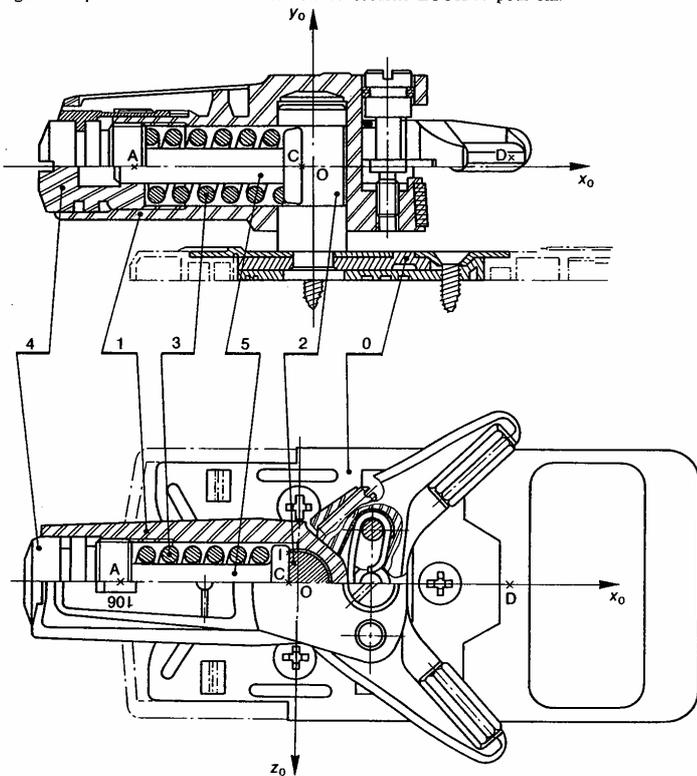


Fig. 8

Le pivot (2) est riveté à la semelle (0) qui est vissée sur le ski. Soit $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère lié à la semelle tel que (O, \vec{y}_0) coïncide avec l'axe du pivot et (O, \vec{x}_0) soit dirigé suivant l'axe du ski.

Le corps (1) a une liaison pivot sans frottement d'axe (O, \vec{y}_0) avec le pivot (2). Soit $R(O, \vec{x}_1, \vec{y}_0, \vec{z}_1)$ un repère lié au corps (1) tel que l'axe (O, \vec{x}_1) soit dirigé suivant l'axe du corps.

On pose : $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_0)$.

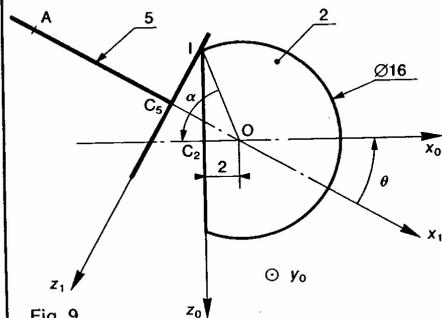


Fig. 9

La rotation du corps (1) provoque le déplacement du piston (5) et la compression du ressort (3) grâce au méplat usiné sur le pivot. Le réglage de la dureté de la fixation s'effectue en comprimant plus ou moins le ressort (3) par l'intermédiaire du bouchon (4).

On suppose que le piston (5) a une liaison linéique annulaire sans frottement d'axe (A, \vec{x}_1) avec le corps (1) et une liaison linéique rectiligne d'axe (I, \vec{y}_0) de normale \vec{x}_1 avec frottement, avec le pivot (2) lorsque $\theta \neq 0$. Cette liaison est supposée avoir un coefficient de frottement suffisamment élevé pour considérer que le piston (5) ne vient pas en contact avec le pivot (1).

On pose : $\vec{OA} = -44\vec{x}_1$ (en millimètres).

La position du point I est définie par la figure 9. Le ressort (3) a les caractéristiques suivantes :

Longueur « libre » : $l_0 = 40$ mm, longueur « montée » : $l = 36$ mm, raideur $K = 5$ daN/mm.

A l'instant du déclenchement de la fixation, l'action de la chaussure sur la fourche du corps (1) est représentable par le torseur :

$$\{ \mathcal{T}(\text{chaussure} \rightarrow 1) \}_D = \begin{Bmatrix} X\vec{x}_1 + Y\vec{y}_0 + F\vec{z}_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

avec $\vec{OD} = 50\vec{x}_1 + 2\vec{y}_0$ (en millimètres).

Les pièces de la fixation sont supposées de poids négligeable devant F.

QUESTIONS

1° Déterminer la force exercée par le ressort (3) sur le piston (5) en fonction de l'angle θ .

2° Déterminer la relation entre l'angle θ et la composante F sur l'axe \vec{x}_1 de l'action mécanique exercée par la chaussure sur la fourche du corps (1).

RÉPONSES

1° $\vec{R}(3 \rightarrow 5) = 100[1 + 4 \cos(75,52 - \theta)]\vec{x}_1$ (θ exprimé en degrés et $\|\vec{R}(3 \rightarrow 5)\|$ en newtons).

2° En appliquant le théorème du moment statique par rapport à l'axe (O, \vec{y}_0) à l'ensemble constitué par (1), (4) et les fourches; puis le théorème du moment statique par rapport à l'axe (I, \vec{y}_0) au piston (5). On trouve :

$$F = \frac{88[1 + 4 \cos(75,52 - \theta)] \sin(75,52 - \theta)}{5,5 - \cos(75,52 - \theta)}$$

2 — Sur un plan incliné (0) un parallépipède rectangle (1) retient une barre cylindrique de révolution (2) (figure 10). Étudions la rupture d'équilibre d'un tel système.

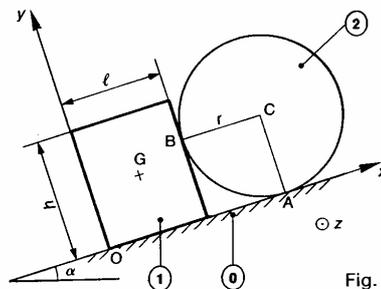


Fig. 10

Dans ce problème, supposé plan, soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au plan (0), l'axe (O, \vec{x}) étant dirigé suivant la ligne de plus grande pente du plan. Notons α l'angle du plan (0) par rapport au plan horizontal. Le parallépipède rectangle (1) est homogène, de masse m, de centre de gravité G. Sa section droite a pour largeur l et pour hauteur h.

La barre cylindrique (2) est homogène, de masse M. Si section droite est circulaire de centre C, de rayon r. Soit f le coefficient de frottement entre les trois solide en contact.

On donne :

$$\begin{cases} m = 4 \text{ kg} \\ M = 12 \text{ kg} \\ g = 10 \text{ m/s}^2 \\ l = 10 \text{ cm} \\ h = 15 \text{ cm} \\ r = 10 \text{ cm} \\ f = 0,2. \end{cases}$$

QUESTIONS

1° Écrire les six équations scalaires déduites du principe fondamental de la statique appliqué à (1) puis à (2).

2° En supposant (hypothèse dont on vérifiera la validité à la question 5) qu'à la rupture d'équilibre :

(1) glisse sur (0) sans basculer.

(2) roule sans glisser sur (0) et roule et glisse sur (1).

Écrire les deux équations scalaires que l'on obtient lorsque le système est à la limite du glissement.

3° Déterminer la valeur maximale de l'angle α pour que le système reste en équilibre par rapport au plan (0).

4° A la limite du glissement, déterminer les inconnues de liaison.

5° Vérifier la validité de l'hypothèse de rupture d'équilibre faite à la question 2.

RÉPONSES

1° En posant :

$$\{\mathcal{C}((0) \rightarrow (1))\} = \begin{Bmatrix} X_0 \vec{x} + Y_0 \vec{y} \\ M_0 \vec{z} \end{Bmatrix}_O$$

$$\{\mathcal{C}((1) \rightarrow (2))\} = \begin{Bmatrix} X_B \vec{x} + Y_B \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

$$\{\mathcal{C}((0) \rightarrow (2))\} = \begin{Bmatrix} X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

les équations d'équilibre s'en déduisent facilement...

$$2^\circ \begin{cases} X_0 = fY_0 \\ Y_B = fX_B \end{cases}$$

3° α_{maxi} est tel que :

$$\text{tg } \alpha_{\text{maxi}} = \frac{f}{1 + \frac{M}{m}(1-f)}$$

$$4^\circ \begin{aligned} X_0 &= 8,22 \text{ (en N)} \\ Y_0 &= 41,1 \\ M_0 &= 1,35 \text{ (en mN)} \\ X_B &= 5,87 \\ Y_B &= 1,17 \\ X_A &= 1,17 \\ Y_A &= 118,62. \end{aligned}$$

5° Condition de non-basculement de (1) sur (0) : $M_0 > 0$.

Condition de roulement sans glissement de (2) sur (0) : $X_A < fY_A$.

3 — La figure 11 représente le schéma cinématique de la suspension du demi-train avant du véhicule Renault 4.

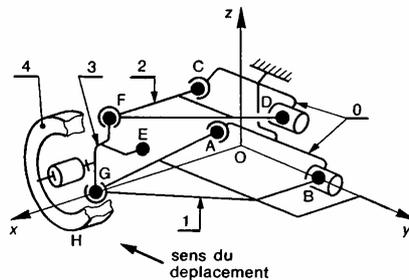


Fig. 11

La suspension est constituée d'un triangle inférieur (1) et d'un triangle supérieur, (2), liés à la caisse par deux liaisons rotule de centre A et C et deux liaisons linéique annulaire d'axe (B, \vec{y}) et (D, \vec{y}) respectivement. Le porte moyeu (3) a une liaison rotule de centre F avec (2) et une autre liaison rotule de centre G avec (1).

La bielle de direction, non représentée sur la figure, a une liaison rotule de centre E avec (3), et exerce sur (3) une action mécanique représentée par la force (E, \vec{F}). La barre de torsion d'axe (O, \vec{y}) exerce sur le triangle inférieur une action mécanique représentée par le couple de moment $C\vec{y}$.

La roue (4) a une liaison pivot d'axe (K, \vec{x}) avec le porte moyeu (3) (le véhicule se déplace en ligne droite).

On suppose que toutes les liaisons définies jusqu'à présent sont sans frottement et que les pièces constituant la suspension sont de masse nulle ainsi que la roue.

L'action mécanique de la route sur la roue est représentée par la force (H, \vec{R}) (le moment de roulement est négligé).

On pose : $N = \vec{z} \cdot \vec{R}$. Soit f le coefficient de frottement entre la roue et la route.

On donne, en millimètres, dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\begin{aligned} \vec{OA} &= -100\vec{y}; & \vec{OB} &= 200\vec{y}; & \vec{OC} &= 50\vec{x} + 400\vec{z}; \\ \vec{CD} &= 200\vec{y}; & \vec{OG} &= 350\vec{x}; & \vec{CF} &= 200\vec{x}; \\ \vec{FE} &= 150\vec{y} - 150\vec{z}; & \vec{GH} &= 50\vec{x} - 150\vec{z}. \end{aligned}$$

QUESTION

Le véhicule étant dans une phase de freinage brutal dans le sens de $-\vec{y}$, déterminer F et C ainsi que les actions mécaniques dans les liaisons, sauf dans la liaison entre la roue et le porte moyeu. On se placera dans le cas où les roues avant sont à la limite du glissement par rapport à la route. On donne $N = 440$ daN et $f = 0,9$.

RÉPONSE

Les pièces étant de masse nulle on peut appliquer le principe fondamental de la statique à tout ensemble de pièces constituant la suspension (voir chapitre 2 de dynamique).

On trouve alors (en décanewtons et en mètre-décanewtons)

$$\{\mathcal{C}(\text{caisse} \rightarrow 1 \text{ en } A)\} = \begin{Bmatrix} -680\vec{x} - 545\vec{y} - 293\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

$$\{\mathcal{C}(\text{caisse} \rightarrow 1 \text{ en } B)\} = \begin{Bmatrix} 613\vec{x} - 147\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

$$\{\mathcal{C}(\text{caisse} \rightarrow 2 \text{ en } C)\} = \begin{Bmatrix} 183\vec{x} + 149\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$$

$$\{\mathcal{C}(\text{caisse} \rightarrow 2 \text{ en } D)\} = \begin{Bmatrix} -149\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D$$

$$\{\mathcal{C}(2 \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} 34\vec{x} + 149\vec{y} \\ F \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_F$$

$$\{\mathcal{C}(1 \rightarrow 3)\} = \begin{Bmatrix} -67\vec{x} - 545\vec{y} - 440\vec{z} \\ C \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$$

et $F = 33$, $C = 154$.

4 — Pour l'opération de tournage d'un alésage d'une série de 1000 têtes de vérin, on décide pour obtenir un montage et un démontage rapide de la pièce de brider celle-ci par un mécanisme utilisant l'effet centrifuge, créé par la rotation de la broche, sur deux masselottes identiques (S_1) et (S_2) (figure 12).

Le but de l'étude est la détermination de la masse des masselottes, pour que la pièce reste en contact avec ses appuis pour des conditions de coupe données.

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti du tour, l'axe (O, \vec{x}) coïncidant avec l'axe de la broche.

Soit $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié au montage (M), on pose : $\theta = (\vec{y}, \vec{y}_1)$.

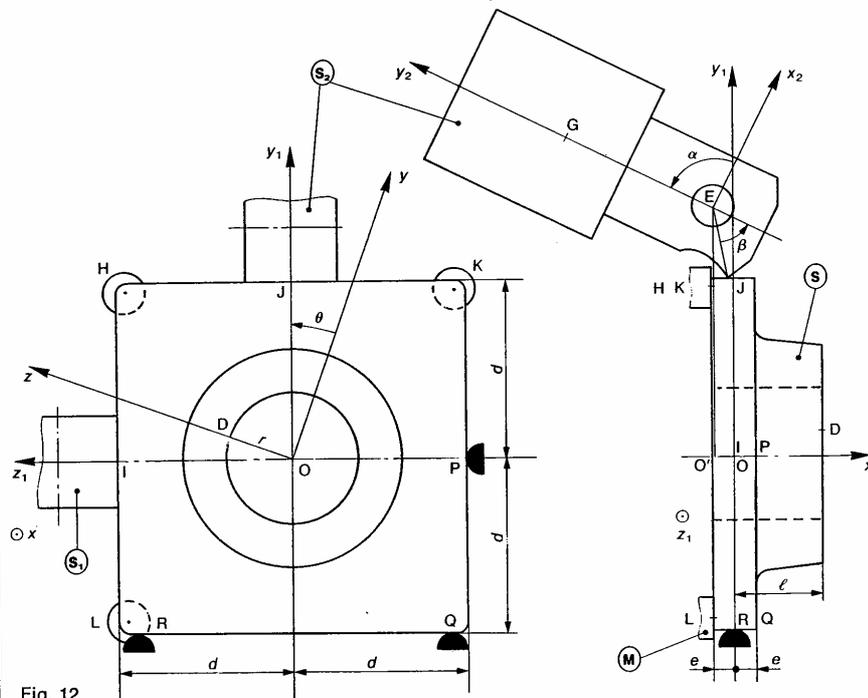


Fig. 12

Le positionnement de la pièce (S) dans le montage (M) est réalisé par 6 appuis ponctuels sans frottement aux points H, K, L, P, Q, R, dont les coordonnées cartésiennes dans le repère R_1 sont en première approximation :

$$H \begin{vmatrix} -e & -e & -e & 0 & 0 & 0 \\ d & d & d & 0 & -d & -d \\ d & -d & d & -d & -d & d \end{vmatrix}$$

Les normales de contact dirigées de l'appui vers la pièce étant respectivement : $\vec{x}, \vec{x}, \vec{x}, \vec{z}_1, \vec{y}_1, \vec{y}_1$.

Le mécanisme de serrage, constitué par deux masselottes identiques (S_1) et (S_2), exerce sur la pièce (S) deux forces (I, \vec{F}) et (J, \vec{F}) telles que :

$$\vec{F} \begin{vmatrix} -F \sin \varphi & -F \sin \varphi \\ 0 & -F \cos \varphi \\ -F \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \\ d & 0 \end{vmatrix}$$

φ est l'angle de frottement entre le mécanisme de serrage et la pièce.

On suppose que l'outil à aléser exerce sur la pièce la force (D, \vec{F}_C) telle que :

$$\vec{F}_C = -F_A \vec{x} + F_T \vec{y} + F_R \vec{z}$$

avec $F_A, F_T, F_R \geq 0$ et $\vec{OD} = t\vec{x} + r\vec{z}$.

L'action de la pesanteur est négligée.

QUESTIONS

1° On considère le torseur d'action mécanique de l'outil sur la pièce défini au point O par :

$$\{\mathcal{C}(\text{outil} \rightarrow S)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_0 \end{Bmatrix}$$

avec

$$\vec{R} = R_1 \vec{x} + R_2 \vec{y}_1 + R_3 \vec{z}_1$$

$$\vec{M}_0 = M_1 \vec{x} + M_2 \vec{y}_1 + M_3 \vec{z}_1.$$

Déterminer $R_1, R_2, R_3, M_1, M_2, M_3$ en fonction de F_A, F_T et F_R .

2° On suppose que la pièce est dynamiquement équilibrée par rapport à l'axe de rotation (O, \vec{x}) et que la broche tourne à vitesse angulaire constante.

Dans ces conditions, on montre en dynamique (chapitre 2) que le torseur des actions mécaniques extérieures à la pièce (S) est nul. En admettant ce résultat, déterminer les actions des appuis sur la pièce en fonction de $R_1, R_2, R_3, M_1, M_2, M_3$ et F .

3° On pose $F_R = \lambda F_T$ et $F_A = \mu F_T$. En remplaçant $\sin \theta$ et $\cos \theta$ par 1, déterminer des majorants des composantes $R_1, R_2, R_3, M_1, M_2, M_3$.

4° Déterminer l'ordre de grandeur de la valeur minimale de F qui maintient la pièce en contact avec ses 6 appuis, en majorant les expressions obtenues, de la même façon qu'à la question précédente.

On donne :

$$\lambda = 0,1, \quad \mu = 0,2, \quad \varphi = 10^\circ, \\ r = 15 \text{ mm}, \quad d = 40 \text{ mm}, \quad l = 20 \text{ mm}.$$

$$F_T = K_s \cdot A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_s : \text{pression spécifique de coupe} \\ K_s = 1250 \text{ N/mm}^2 \text{ pour un alliage d'aluminium.} \\ A = ap \\ a : \text{avance, } a = 0,1 \text{ mm/tr} \\ p : \text{profondeur de passe, } p = 2 \text{ mm.} \end{array} \right.$$

5° La masselotte de serrage (S_2), de centre de gravité G, a une liaison pivot sans frottement d'axe (E, \vec{z}_1) avec le montage (M) telle que : $\vec{OE} = h\vec{y}_1$ (O' sur l'axe (O, \vec{x})). Soit $R_2(E, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_1)$ un repère lié à (S_2) tel que $\vec{EG} = b\vec{y}_2$.

$$\text{On pose} \quad (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \alpha$$

(S_2) est en contact avec (S) le long d'un segment de droite de l'axe (J, \vec{z}_1).

$$\text{On pose : } \|\vec{EJ}\| = c \text{ et } (\vec{EJ}, -\vec{y}_2) = \beta.$$

Si on suppose la masse de (S_2) concentrée en son centre de gravité G, on montre en dynamique (chapitre 2) que l'effet centrifuge sur (S_2) due à la rotation de la broche est équivalent à la force (G, \vec{W}), telle que :

$$\vec{W} = m\omega^2 \rho \vec{y}_1$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} m : \text{masse de } (S_2) \\ \omega = \theta' \\ \rho : \text{distance de G à l'axe } (O, \vec{x}). \end{array} \right.$

En appliquant à (S_2) le théorème du moment statique par rapport à l'axe (E, \vec{z}_1), déterminer la masse m minimale que doit avoir la masselotte pour exercer sur (S) la force F calculée précédemment.

On donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} h = 56 \text{ mm} \\ b = 37 \text{ mm} \\ c = 15 \text{ mm} \\ \alpha = 60^\circ \\ \beta = 45^\circ \\ \theta' = 104,72 \text{ rad/s (1000 tr/min).} \end{array} \right.$$

RÉPONSES

1° $R_1 = -F_A$

$$R_2 = F_T \cos \theta + F_R \sin \theta$$

$$R_3 = -F_T \sin \theta + F_R \cos \theta$$

$$M_1 = -rF_T$$

$$M_2 = -(lF_R + rF_A) \cos \theta + lF_T \sin \theta$$

$$M_3 = (lF_R + rF_A) \sin \theta + lF_T \cos \theta.$$

2° $H = \frac{1}{2d} (M_3 - M_2) + F \sin \varphi$

$$K = \frac{1}{2d} M_2 - \frac{R_1}{2} + \frac{F}{2} \sin \varphi$$

$$L = -\frac{1}{2d} M_3 - \frac{R_1}{2} + \frac{F}{2} \sin \varphi$$

$$P = F \cos \varphi - R_3$$

$$Q = \frac{1}{2} \left(F \cos \varphi - R_2 - \frac{M_1}{d} \right)$$

$$R = \frac{1}{2} \left(F \cos \varphi - R_2 + \frac{M_1}{d} \right).$$

3° Majorant de :

$$\begin{aligned} R_1 &: \mu F_T \\ R_2 &: (1+\lambda)F_T \\ R_3 &: (1+\lambda)F_T \\ M_1 &: rF_T \\ M_2 &: [(1+\lambda)l + \mu r]F_T \\ M_3 &: [(1+\lambda)l + \mu r]F_T \end{aligned}$$

4° La pièce est en contact avec ses 6 appuis si les composantes H, K, L, P, Q, R sont strictement positives.

$$H > 0 \Rightarrow F > \frac{1}{\sin \varphi} \left[(1+\lambda) \frac{l}{d} + \mu \frac{r}{d} \right] F_T$$

$$K > 0 \text{ et } L > 0 \Rightarrow F > \frac{1}{\sin \varphi} \left[(1+\lambda) \frac{l}{d} + \mu \left(\frac{r}{d} + 1 \right) \right] F_T$$

$$P > 0 \Rightarrow F > (1+\lambda) \frac{F_T}{\cos \varphi}$$

$$Q > 0 \text{ et } R > 0 \Rightarrow F > \frac{1}{\cos \varphi} \left[(1+\lambda) + \frac{r}{d} \right] F_T$$

Avec les valeurs numériques proposées c'est la condition pour $K > 0$ et $L > 0$ qui doit être respectée, soit :

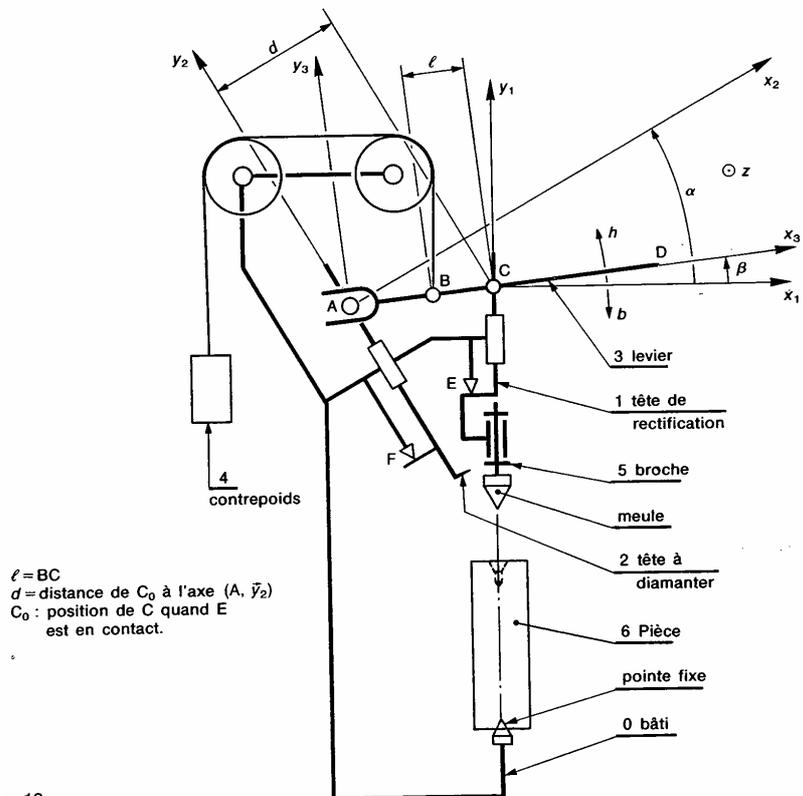
$$F > 1188 \text{ N.}$$

5° Masse minimale : $m = 290 \text{ g.}$

5 — Le schéma cinématique de la figure 13 représente un dispositif de commande manuelle de machine à rectifier les trous de centre.

Une action mécanique en D vers le bas (flèche b) sur le levier (3) provoque la descente de la tête de rectification (1), qui porte la broche (5) supportant la meule. Ceci permet de rectifier l'un des trous de centre d'une pièce (6) maintenue à la main sur la pointe fixe.

Une action mécanique en D vers le haut (flèche h) sur le même levier provoque la translation de la tête à diamanter (2). La meule peut ainsi être remise en état



$l = BC$
 $d =$ distance de C_0 à l'axe (A, \bar{y}_2)
 C_0 : position de C quand E est en contact.

Fig. 13

entre deux opérations. Un contrepoids (4) est suspendu à un câble sans raideur, de masse nulle, reposant sur deux poulies. Il permet le rappel automatique de la tête à rectifier contre la butée (E) et de la tête à diamanter contre la butée (F). (E) et (F) sont à contact ponctuel. Toutes les liaisons symbolisées sur la figure sont supposées sans frottement et sans jeu. On note :

- m_1 la masse de l'ensemble {(1), (5), (meule)}
- m_2 la masse de la tête à diamanter (2)
- m_4 la masse du contrepoids (4).

On néglige la masse des autres éléments du mécanisme par rapport à m_1 , m_2 et m_4 .

QUESTIONS

- 1° Quand l'ensemble est au repos, c'est-à-dire dans la configuration de la figure, déterminer les actions mécaniques des butées (E) et (F) sur, respectivement, la tête de rectification et la tête à diamanter en fonction des paramètres définis ci-dessus et sur la figure.
- 2° En déduire la valeur minimale de m_4 pour que l'équilibre proposé sur la figure soit possible.

Application numérique :

- $\alpha = 30^\circ$; $m_1 = 3 \text{ kg}$;
- $\beta = 6^\circ$; $m_2 = 1 \text{ kg}$;
- $d = 130 \text{ mm}$; $m_4 = 8 \text{ kg}$;
- $l = 60 \text{ mm}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$.

RÉPONSES

- 1° En appliquant successivement :
- a) Au levier (3) le théorème du moment statique par rapport à l'axe (C, \vec{z}), puis le théorème de la résultante statique en projection sur \vec{x}_3 et \vec{y}_3 .
 - b) A la tête à diamanter (2) le théorème de la résultante statique en projection sur \vec{y}_2 .
 - c) A la tête à rectifier (ensemble : {(1), (5), (meule)}) le théorème de la résultante statique en projection sur \vec{y}_1 .
- On trouve :
- $$\|\vec{R}\{(E) \rightarrow (1)\}\| = m_4 g \left[1 - \frac{l}{d} \cos^2 \beta \cos(\alpha - \beta) \right] - m_1 g$$
- $$\|\vec{R}\{(F) \rightarrow (2)\}\| = m_4 g \frac{l}{d} \cos^2(\alpha - \beta) \cos \beta - m_2 g \cos \alpha.$$
- 2° $m_4 > 5,15 \text{ kg}$.

EXERCICES SANS RÉPONSES

6 — Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié à un mur (0), l'axe (O, \vec{z}) étant dirigé suivant la verticale ascendante (figure 14).

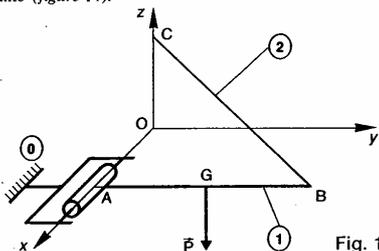


Fig. 14

Un portique (1) assimilable à un segment de droite AB de longueur l , de centre de gravité G situé au milieu de AB, de poids $\vec{P} = -P\vec{z}$, a une liaison pivot sans frottement d'axe (A, \vec{x}) avec le mur (0), telle que : $\vec{OA} = d\vec{x}$ ($d > 0$). Ce portique est maintenu horizontal par un câble (2), sans raideur et de masse nulle, accroché à son extrémité B et au point C du mur (0), tel que : $\vec{OC} = h\vec{z}$ ($h > 0$).

QUESTION

Déterminer en fonction de d , l , h et P le torseur d'action mécanique du mur (0) sur le portique (1), ainsi que la tension du câble (2).

7 — Le robot manipulateur représenté figure 15 par son schéma se compose :

- d'un socle (1) pivotant autour de l'axe vertical (O, \vec{y}) par rapport à une base (0), non représentée,
 - d'un bras mécanique constitué de deux parties :
 - le « bras » (2), relié au socle par une articulation « d'épaule »,
 - l'avant-bras (3), relié au bras (2) par une articulation de « coude ».
- L'angle du bras (2) par rapport à la verticale est commandé par un « vérin d'épaule » V_1 , l'angle de l'avant-bras (3) par rapport à l'horizontale est commandé par un « vérin de coude » V_2 .
- Les ensembles (2)-(4) et (3)-(5) constituent des parallélogrammes. A l'extrémité de l'avant-bras (3), le moteur (8) commande l'orientation du positionneur (7) par rapport au poignet (6).
- Le robot étant immobilisé dans la configuration de la figure, la position des points particuliers dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est donnée, en millimètres, par :
- $\vec{OA} = -200\vec{x}$; $\vec{OB} = 200\vec{x}$; $\vec{OC} = 250\vec{x} + 430\vec{y}$;
 - $\vec{OD} = 360\vec{x} + 630\vec{y}$; $\vec{OE} = 610\vec{x} + 1075\vec{y}$;
 - $\vec{OF} = 610\vec{x} + 1275\vec{y}$; $\vec{OH} = 1050\vec{x} + 825\vec{y}$;
 - $\vec{OI} = 2080\vec{x} + 420\vec{y}$; $\vec{OJ} = 2080\vec{x} + 220\vec{y}$.
- Le positionneur (7) est immobilisé dans le plan de symétrie (O, \vec{x}, \vec{y}) du robot et supporte la charge verticale (K, \vec{P}) telle que : $\vec{P} = -4000\vec{y}$ (en daN) et $\vec{OK} = 2350\vec{x}$ (en millimètres).

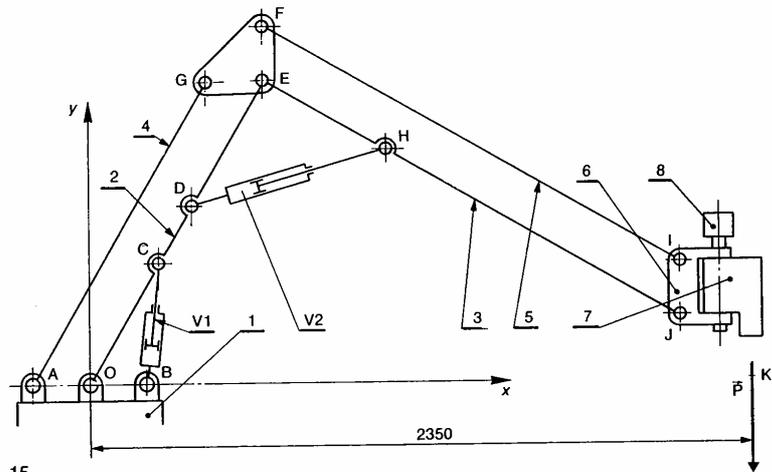


Fig. 15

On suppose les liaisons sans frottement et les pièces constituant le robot de poids négligeable devant \bar{P} .

QUESTION

Déterminer graphiquement et analytiquement les actions mécaniques exercées par les vérins V_1 et V_2 sur le bras ②.

8 — La figure 16 représente un montage de tournage permettant l'usinage d'une pièce cylindrique en acier moulé.

Le dispositif de bridage est constitué des éléments suivants :
 — Arbre de commande ② actionné dans le sens de la flèche par une clé dynamométrique tarée à 45 mN;

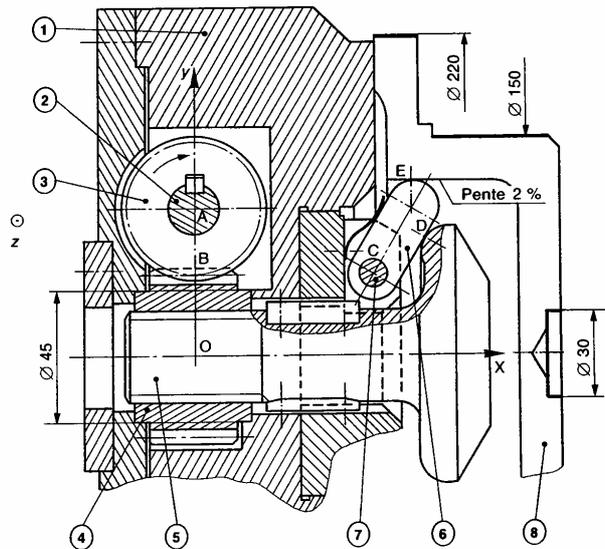


Fig. 16

- Pignon de commande (3) : 16 dents, angle d'inclinaison d'hélice (à droite) $\beta_3 = 45^\circ$, module normal $m_n = 2$ mm, angle de pression $\alpha = 20^\circ$;
- Roue-écrou (4) : 20 dents, angle d'inclinaison d'hélice (à droite) $\beta_4 = 45^\circ$, module normal $m_n = 2$ mm, angle de pression $\alpha = 20^\circ$;
- Le rendement du système vis-écrou (3)-(4) est $\eta = 0,8$.
- Axe d'ablocage (5) : sa partie filetée est définie par la figure 17 (hélice à droite);

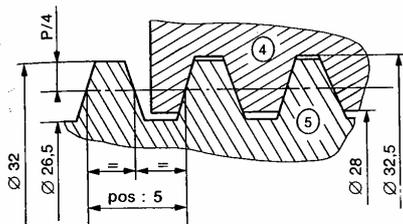


Fig. 17

- Trois clames (6) disposées à 120° maintenues en contact avec l'axe (5) par trois ressorts à lame. Dans le repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié à (1), la position des points particuliers est donnée en millimètres par :

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= 50,91\vec{y}; \\ \overline{OB} &= 28,284\vec{y}; \\ \overline{OC} &= 62\vec{x} + 22\vec{y}; \\ \overline{CD} &= 18\vec{x} + 12,5\vec{y}; \\ \overline{CE} &= 14\vec{x} + 23\vec{y}. \end{aligned}$$

L'action de la pesanteur est négligée.

QUESTIONS

- 1° La valeur absolue du moment par rapport à l'axe (A, \vec{z}) , exercé sur l'arbre de commande (2) dans le sens de la flèche, étant de 45 mN, calculer le moment par rapport à l'axe (O, \vec{x}) de l'action mécanique de (3) sur (4).

- 2° Déterminer l'effort exercé par la roue-écrou (4) sur l'axe d'ablocage (5) sachant que les coefficients de frottement entre (4) et (1) et entre (4) et (5) ont pour valeur $f_{4/1} = f_{4/5} = 0,15$. On supposera que la liaison plane de normale (O, \vec{x}) entre (4) et (1) a lieu sur une couronne de diamètre moyen 45 mm.

- 3° Déterminer les efforts de bridage des clames (6) sur la pièce (8) sachant que les coefficients de frottement entre (5) et (6) et entre (6) et (8) ont pour valeur $f_{5/6} = 0,15$ et $f_{6/8} = 0,35$. On admettra que les articulations (7) sont sans frottement et que les actions des trois ressorts à lames sont négligeables.

Vérifier que la composante de l'effort de bridage de (8) sur (1) suivant l'axe (O, \vec{x}) a une valeur supérieure à 1500 N. Valeur minimum exigée pour que la pièce soit en contact avec (1) pour les conditions de coupe choisies. Les effets d'inertie dus à la rotation de la broche sont négligés.

9 — On considère le problème plan suivant :

Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen lié au bâti (Σ) du système bielle manivelle d'un compresseur pneumatique (figure 18).

La manivelle OA, de masse négligeable, a une liaison pivot sans frottement d'axe (O, \vec{z}) avec le bâti (Σ) .

On pose :
$$\begin{cases} OA = r \\ \alpha = (\vec{x}, \overline{OA}). \end{cases}$$

Le coulisseau (S), de masse négligeable, a une liaison glissière avec frottement (coefficient de frottement f) de direction \vec{x} avec le bâti (Σ) .

La bielle AB, de masse négligeable, a une liaison rotule de centre A avec la manivelle OA et une autre liaison rotule de centre B avec le coulisseau (S). Ces deux liaisons sont sans frottement et le point B est sur l'axe (O, \vec{x}) .

On pose :
$$\begin{cases} AB = l \\ \beta = (\overline{AB}, \vec{x}). \end{cases}$$

Le moteur électrique d'axe (O, \vec{z}) exerce sur la manivelle OA un couple donné de moment $C\vec{z}$, avec $C > 0$.

L'air exerce sur le coulisseau (S) la force $(B, F\vec{x})$. F est algébrique. On suppose le système en équilibre par rapport au bâti (Σ) dans une position telle que :

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

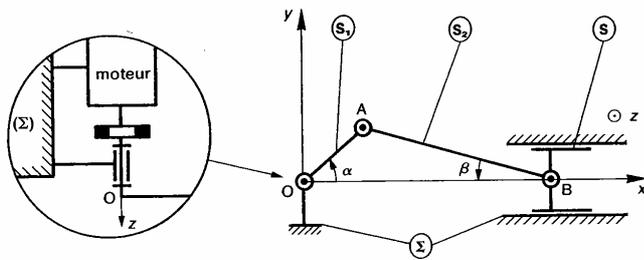


Fig. 18

QUESTIONS

- 1° Quelle relation y a-t-il entre α et β ?
- 2° Combien y a-t-il d'inconnues de liaison dans ce mécanisme?
- 3° Montrer que le système reste en équilibre par rapport au bâti (Σ) si :

$$\frac{C \cos \beta - f \sin \beta}{r \sin(\alpha + \beta)} \leq F \leq \frac{C \cos \beta + f \sin \beta}{r \sin(\alpha + \beta)}$$

10 — Un porte tôle est représenté figure 19. Les molettes ont une liaison pivot d'axe (B, \vec{z}) et (B', \vec{z}) avec le flasque. Elles serrent la tôle sous l'action mécanique de deux biellettes articulées en C et C' avec les molettes, et en D et D' avec l'étrier auquel est accroché le câble.

On suppose que toutes les liaisons sont sans frottement, sauf bien sûr la liaison entre la tôle et les molettes, et que toutes les pièces sont de masse négligeable devant la masse de la tôle.

On donne (en millimètres)

$$\begin{cases} \vec{IA} = -30\vec{y} \\ \vec{IC} = -\vec{IB} = 15\vec{x} + 12\vec{y} \\ \vec{ID} = 102\vec{x} - 10\vec{y} \end{cases}$$

QUESTION

Déterminer la valeur minimale du coefficient de frottement entre la tôle et les molettes pour que ce mécanisme puisse fonctionner.

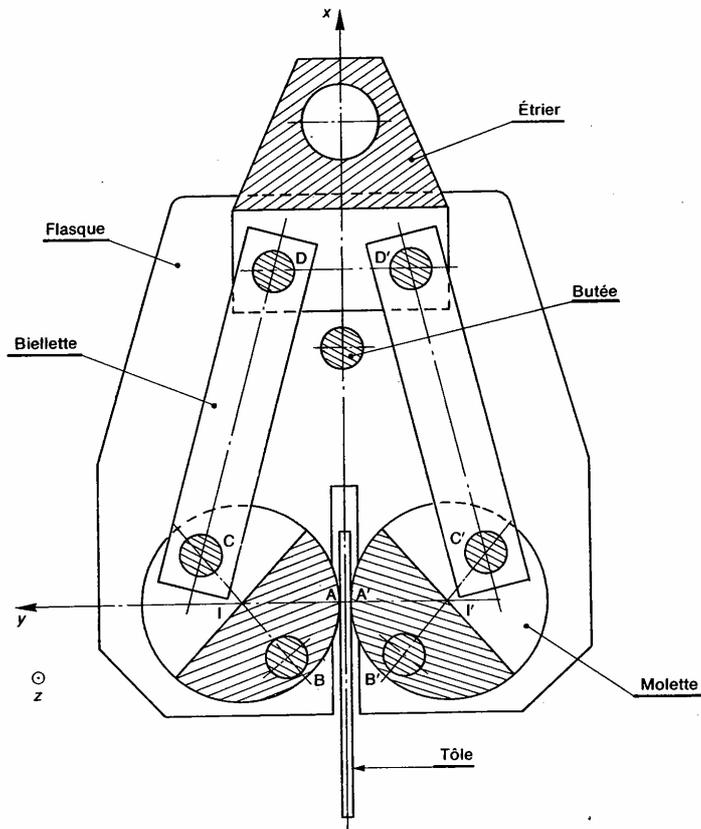


Fig. 19